সরল গণিত—বীজগণিত।

সরল গণিত।

দ্বিতীয় ভাগ।

বীজগণিত।

শ্রীসার্ গুরুদাস বন্দ্যোপাধ্যায়, কেটি,
এম্-এ, ডি-এল্, পিএচ্-ডি,
প্রণীত।

Calcutta
S. K. LAHIRI & CO.
56, College Street
1914

Printed and published by J. C. Ghosh for Messrs. S. K. Lahiri & Co.,
at the Cotton Press, 57 Harrison Road, Calcutta.

বিজ্ঞাপন।

বাঙ্গালা ভাষায় বীজগণিতের গ্রন্থ অধিক নাই। অধ্যাপক ৺প্রসন্নকুমার সর্ব্বাধিকারী মহাশয়ের প্রণীত এক খানি, ও প্রসিদ্ধ লেখক ৺রাজকৃষ্ণ মুখোপাধ্যায় মহাশয়ের প্রণীত আর এক খানি, এই দুইখানি বাঙ্গালা ভাষায় বীজগণিত দেখিয়াছি। প্রথমোক্ত পুস্তকে শ্রেঢী পর্য্যন্ত, ও দ্বিতীয়োক্ত পুস্তকে সমাকরণ পর্য্যন্ত, আলোচিত হইয়াছে। কিন্তু তাহাও এখন দুষ্প্রাপ্য। আমার পাটীগণিত রচনাকালে বাঙ্গালা ভাষায় একখানি বীজগণিত, ও একখানি আধুনিক প্রণালী অনুসারে জ্যামিতি, রচনা করিবার ইচ্ছা ছিল। এবং তজ্জন্য আমার প্রণীত পাটীগণিতের পুস্তককে সরল গণিতের প্রথম ভাগ বলিয়া প্রকাশ করা হইয়াছে, আর বীজগণিত ও জ্যামিতি তাহার দ্বিতীয় ও তৃতীয় ভাগরূপে প্রকাশ হইবে মনে করিয়াছিলাম। তদনুসারে এই বীজগণিতের পুস্তক প্রণীত হইল।

পাটীগণিতের অনেকগুলি গ্রন্থ থাকা সত্ত্বেও যে যে কারণে আমি একখানি পাটীগণিত রচনায় প্রবৃত্ত হই, তাহা ঐ পুস্তকের বিজ্ঞাপনে ব্যক্ত করিয়াছি। সে সমস্ত কারণ বাঙ্গালা ভাষায় বিরল বীজগণিত রচনা সম্বন্ধে আরও প্রবলরূপে খাটে। এবং তাহার পুনরুক্তি নিষ্প্রয়োজন।

এই গ্রন্থখানি কোন ইংরাজি বীজগণিতের অনুবাদ বা অনুকরণ নহে। তবে স্থানে স্থানে প্রচলিত ইংরাজি বীজগণিত হইতে, বিশেষতঃ মাননীয় শ্রীযুক্ত বাবু মহেন্দ্রনাথ রায়ের বীজগণিত হইতে, সাহায্য পাইয়াছি। ইহাতে যে কথা যে প্রণালীতে বলিলে বিদ্যার্থীর মূল তত্ত্ব বুঝিবার সুবিধা হয় মনে করিয়াছি, সেই কথা সেই প্রণালীতে বলিয়াছি।

অনুশীলনার্থে উদাহরণ অধিক নাই, এবং যাহা আছে তাহা প্রত্যেক অধ্যায়ের শেষে দেওয়া হইয়াছে। তবে তাহা অধ্যায়ের অন্তর্গত পরিচ্ছেদ অনুসারে শ্রেণিবদ্ধ আছে, এবং তাহা সংখ্যায় অল্প হইলেও প্রকারে বিবিধ।

উচ্চ বীজগণিতের অনেক বিষয় ইহাতে নাই। কিন্তু যাহা আছে তাহা কলিকাতা বিশ্ববিদ্যালয়ের আই-এ এবং আই-এস্‌সি পরীক্ষায় যতদূর আবশ্যক তদপেক্ষা ন্যূন নহে। ইতি।

নারিকেলডাঙ্গা,
২২এ ফাল্গুন, ১৩২০।

শ্রীগুরুদাস বন্দ্যোপাধ্যায়।

সূচীপত্র।

বিষয় | পৃষ্ঠা

দ্বিতীয় ভাগ।

বীজগণিত।

উপক্রমণিকা।

১। সরলগণিতের ভূমিকার (প্রথম ভাগের ২ ধারাতে) বলা হইয়াছে, কোন বিশেষ সংখ্যা না লইয়া, সাধারণ ভাবে গণনার নিয়ম বা গণনার ফল নির্ণয় করা, গণিতের যে ভাগের বিষয় তাহাকে **বীজগণিত** বলে।

এবং পাটীগণিতের ১০ ধারাতে বলা হইয়াছে, অঙ্কের স্থলে অক্ষর দিয়া রচিত বা প্রমাণকৃত সাঙ্কেতিক সূত্র বা নিয়ম সাধারণতঃ খাটে ইহা সহজেই বুঝা যায়।

ইহাতেই আভাস পাওয়া যাইতেছে, অঙ্ক, সংখ্যা, বা রাশির পরিবর্ত্তে অক্ষরপ্রয়োগ, বীজগণিতের কার্য্যপ্রণালীর প্রধান লক্ষণ।

২। সংখ্যা বা রাশি **জ্ঞাত** বা **নির্ণীত** এবং **অজ্ঞাত** বা **নির্ণেয়**, এই দুই প্রকারের হইতে পারে। প্রথম প্রকারের সংখ্যা বা রাশির পরিবর্ত্তে অ, আ, ই, ঈ ইত্যাদি স্বর, অথবা ক, খ, গ ইত্যাদি ব্যঞ্জনবর্ণমালার প্রথম ভাগের অক্ষর ব্যবহৃত হইবে, এবং দ্বিতীয় প্রকারের সংখ্যা বা রাশির পরিবর্ত্তে য, র, ল, ব, শ, ষ, স, হ, বর্ণমালার শেষ ভাগের অক্ষর ব্যবহৃত হইবে।

৩। পাটীগণিতের পরিভাষা ও সাঙ্কেতিক চিহ্ন সমস্তই বীজগণিতে প্রয়োগ করা যায়। অতএব এই বীজগণিতের পুস্তক যখন সরল গণিতের দ্বিতীয় ভাগ, তখন সরল গণিতের প্রথম ভাগে অর্থাৎ পাটীগণিতের

উপক্রমণিকায়, ৫ হইতে ৯ ধারায় যে সকল পরিভাষার ও সাঙ্কেতিক চিহ্নের বিবরণ দেওয়া হইয়াছে তাহার পুনরুক্তি এখানে নিষ্প্রয়োজন। অতিরিক্ত যে সকল পারিভাষিক শব্দের ও সাঙ্কেতিক চিহ্নের প্রয়োগ বীজগণিতে আবশ্যক, তাহাদের বিবরণ কতক নিম্নে ৪ ধারায়, ও কতক পরে ক্রমশঃ যথাস্থানে, দেওয়া যাইবে।

৪। (১) যে রাশি অন্য রাশির সহিত যোগ করিতে হইবে তাহাকে **ধনাত্মক**রাশি বা **ধন**রাশি বলে। যে রাশি অন্য রাশি হইতে বিয়োগ করিতে হইবে তাহাকে **ঋণাত্মক**রাশি বা **ঋণ**রাশি বলে।

ধনরাশি একা বা রাশিমালার সর্ব্বাগ্রে থাকিলে তাহার বামে ধনচিহ্ন + থাকে না, অন্যত্র তাহার বামে ধনচিহ্ন থাকে; এবং কোন রাশির বামে ঋণচিহ্ন – না থাকিলে তাহা ধনরাশি ইহাই বুঝায়। ঋণরাশি যেখানেই থাকুক তাহার বামে ঋণচিহ্ন থাকে।

যথা, $২ = +২$, $ক = +ক$,

$২ + ৩ = ৫$;

$-২ + ৩ = ১$, $ক + খ - খ = ক$

(২) দুইটি রাশির মধ্যে ~ চিহ্ন থাকিলে তাহাদের প্রভেদ বা অন্তর কত তাহাই বুঝায়।

যথা, $২ \sim ৩ = ৩ - ২ = ১$ ।

(৩) অক্ষরে অক্ষরে বা অঙ্কে অক্ষরে গুণিত হইলে গুণন চিহ্ন × তাহাদের মধ্যে লিখিতে হয় না। কখন কখন তৎপরিবর্ত্তে গুণ্য ও গুণকের মধ্যে একটি বিন্দু অঙ্কিত হয়। অঙ্কে অঙ্কে গুণন হইলে তাহাদের মধ্যে × অথবা অবশ্যই অঙ্কিত করিতে হয়, কারণ তাহা না করিয়া দুইটি অঙ্ক পর পর লিখিলে পাটীগণিতের অঙ্ক লিখনের নিয়মানুসারে (পাটীগণিতের ১৪ ধারা দ্রষ্টব্য) তাহার অর্থ অন্যরূপ হয়। এবং দুই অঙ্কের গুণন বুঝাইবার নিমিত্ত তাহাদের মধ্যে যে বিন্দু স্থাপন করা যায় তাহার সহিত দশমিক বিন্দুর পার্থক্য প্রদর্শনার্থে সেই বিন্দু দশমিক বিন্দু অপেক্ষা একটু নিম্নতর স্থানে অঙ্কিত হয়।

যথা, কখ = ক × খ = ক খ।

২ক = ২ × ক = ২ ক।

২৩ = ২ × ৩ = ৬।

কিন্তু ২৩ = ২ × ৩ নহে তাহা = তেইশ।

এবং ২·৩ = ২ + $\frac{৩}{১০}$।

(৪) দুইটি রাশির মধ্যে ≠ এই চিহ্ন থাকিলে তাহারা অসমান এই বুঝায়।

যথা, ২৩ ≠ ২ × ৩।

(৫) রাশিমালার যে যে ভাগগুলি পরস্পর ধনচিহ্ন + বা ঋণচিহ্ন − দ্বারা সম্বদ্ধ তাহাদের প্রত্যেকটিকে সেই রাশিমালার **পদ** বলে। যে রাশিমালাতে একটি পদ থাকে তাহাকে **একপদ**, যাহাতে দুইটি পদ থাকে তাহাকে **দ্বিপদ**, যাহাতে তিনটি পদ থাকে তাহাকে **ত্রিপদ**, এবং যাহাতে তিনের অধিক পদ তাহাকে **বহুপদ** বলে।

যথা, ক, কখ, −গ, একপদ।

ক + খ, ২ক − ৩খ, দ্বিপদ।

ক + খ + ২, ক − খ − গ, − ক + ২খ + গ, ত্রিপদ।

৩ + চ + ছ − জ, ৫ + ক + খ + ম + প, বহুপদ।

(৬) কোন পদে একের অধিক অঙ্ক বা অক্ষর থাকিলে তন্মধ্যে কোন একটি অঙ্ক বা অক্ষরকে তাহার **প্রকৃতি** বলে, এবং অঙ্ককে **সাঙ্খ্য প্রকৃতি** ও অক্ষরকে **আক্ষরিক প্রকৃতি** বলে।

যথা, পদটি যদি ৩কখ হয়, তাহা হইলে

ক খ'র প্রকৃতি ৩,

৩ খ'র প্রকৃতি ক,

ও ৩ ক'র প্রকৃতি খ,

এবং ক খ'র সাঙ্খ্য প্রকৃতি ৩

ও ৩ ক'র আক্ষরিক প্রকৃতি খ।

(৭) যে সকল পদে অক্ষবের প্রভেদ থাকে না, কেবল সাঙ্খ্যপ্রকৃতিব প্রভেদ থাকে, তাহাদিগকে **সম পদ** বলে। যাহাদেব অক্ষবেব প্রভেদ আছে, তাহাদিগকে **বিষম পদ** বলে। যথা, ৩কখ ও ৫কখ সমপদ, ২কখ ও ২কগ বিষম পদ।

(৮) বাশিব শক্তিব চিহ্নকে **সূচক** বলে।

যথা ৩² = ৩ × ৩, এ স্থলে ২ তিনেব দ্বিতীয় শক্তিব সূচক।

(৯) কোন দুইটি বাশি বা বাশিমালা সমান হইলে, তাহাদেব মধ্যে = এই সমতার চিহ্ন অঙ্কিত কবিয়া যে বাশিমালা লিখিত হয় তাহাকে **সমীকরণ** বলে। আব সেই সমতা কোন অক্ষবেব বিশেষ মূল্যেব উপব নির্ভব না কবিয়া যদি বাশিমালার অক্ষব সকলেব মূল্য যথেচ্ছা পবিবর্তিত কবিলেও বজায় থাকে, তাহা হইলে সমীকবণকে **সাম্য** বা **তাদাত্ম্য** বলে।

যথা, স + ৩ = ৭,

ক = ½(ক + খ) + ½(ক − খ),

ইহাদেব প্রথমটি সমীকবণ,

কাবণ, তাহাতে সমতা কেবল স = ৪ হইলেই থাকে, নতুবা থাকে না

এবং দ্বিতীয়টি সাম্য,

কাবণ, তাহাতে সমতা ক ও খ এব মূল্য যাহাই হউক সকল স্থলেই বজায় থাকে,

যে হেতুক, ½ (ক + খ) + ½ (ক − খ)

= ½ ক + ½খ + ½ ক − ½খ

= ½ ক + ½ ক = ক।

(১০) যদি দুইটি বাশি বা বাশিমালা সমান না হয়, তবে তাহাদেব মধ্যে > বা < এই দুইটিব একটি চিহ্ন দিয়া যে বাশিমালা লিখিত হয় তাহাকে **বৈষম্য** বলে।

যথা ২ক + খ > ক + খ

ইহা একটি বৈষম্য।

(১১) যে কোন রাশি ও এক কে সেই রাশি দিয়া ভাগের ফল, এই দুইটিকে পরস্পরের **অন্যোন্যক** বলে।

যথা ক ও $\frac{১}{ক}$ পরস্পরের অন্যোন্যক।

• ২। এইখানে গণিতের কএকটি স্বতঃসিদ্ধ তত্ত্ব নিম্নে লিপিবদ্ধ করা যাইতেছে। শিক্ষার্থী তাহা মনে রাখিবেন।

(১) কোন রাশির সহিত যে কোন একই রাশির যোগ ও বিয়োগ হইলে, প্রথমোক্ত রাশির কোন পরিবর্ত্তন হয় না।

যথা, ক + খ − খ = ক।

(২) কোন রাশির যে কোন একই রাশিদ্বারা গুণন ও ভাগ হইলে, প্রথমোক্ত রাশির কোন পরিবর্ত্তন হয় না।

যথা, ক × খ − খ = ক।

(৩) কোন সমীকরণের উভয়দিকে একই রাশির যোগ, অথবা উভয় দিক হইতে একই রাশির বিয়োগ হইলে, দুই দিকে পরস্পর সমতার কোন ব্যতিক্রম হয় না।

যথা, যদি ক + খ = গ,

তাহা হইলে ক + খ + ঘ = গ + ঘ,

এবং ক + খ − চ = গ − চ।

(৪) কোন সমীকরণের উভয় দিক একই রাশির দ্বারা গুণ বা ভাগ করা হইলে, দুই দিকের পরস্পর সমতার কোন ব্যতিক্রম হয় না।

যথা, যদি ক + খ = গ,

তাহা হইলে (ক + খ) × চ = গ × চ

এবং (ক + খ) ÷ ছ = গ ÷ ছ।

প্রথম অধ্যায়।

যোগ, বিযোগ, ও ঋণরাশি।

প্রথম পরিচ্ছেদ।

যোগ।

৬। যোজ্য রাশিগুলির অগ্রপশ্চাৎ সন্নিবেশে যোগফলের কোন পরিবর্ত্তন হয় না। অর্থাৎ

ক+খ=খ+ক।

৭। পাটীগণিতের প্রক্রিয়া কেবল ধনরাশি লইয়া, কিন্তু বীজগণিতের প্রক্রিয়া ধনরাশি ও ঋণরাশি উভয় প্রকার রাশি লইয়া, এবং ইহা বীজগণিতের একটি বিশেষ লক্ষণ। অতএব বীজগণিতে যোগক্রিয়ায় যোজ্যগুলি সমস্ত ধনরাশি, অথবা সমস্ত ঋণরাশি, অথবা কতক ধনরাশি ও কতক ঋণরাশি, হইতে পারে।

যোগের সচরাচর প্রচলিত অর্থ একত্র করা। যোজ্যগুলি সমস্ত ধনরাশি হইলে সেখানে সে অর্থ অবশ্যই খাটে। এবং তাহারা সমস্ত ঋণরাশি হইলেও সেখানে সে অর্থ খাটে, তবে সে স্থলে যোগফল ঋণরাশি হইবে, ও তাহার বামে ঋণচিহ্ন—থাকিবে, অথবা সেই যোগফল বহুপদ হইলে তাহার প্রত্যেক পদের বামে—চিহ্ন থাকিবে।

এতএব যোজ্যগুলি সমস্ত ধনরাশি অথবা সমস্ত ঋণরাশি হইলে, অর্থাৎ সমস্ত একপ্রকারের রাশি হইলে, তাহাদের যোগের নিয়ম নিম্নলিখিতরূপ হইবে।

যোগের ১ম নিয়ম। যোজ্যগুলি সমস্ত ধনরাশি হইলে তাহাদিগকে পর পর প্রত্যেকের বামে ধনচিহ্ন অর্থাৎ+চিহ্ন সহ লিখিবে। এবং তন্মধ্যে যেগুলি সমপদ তাহাদিগকে পৃথক্ পৃথক্ না লিখিয়া তৎপরিবর্ত্তে

তাহাদের সাংখ্য প্রকৃতিগুলির সমষ্টি লিখিয়া তাহার দক্ষিণে তাহাদের অক্ষর-গুলি লিখিবে।

যোজ্যগুলি সমস্ত ঋণরাশি হইলে উক্ত নিয়মে কার্য্য করিবে এবং প্রত্যেক পদের বামে — চিহ্ন রাখিবে।

এই নিয়মের হেতু নিম্নের উদাহরণত্রয় দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে :

(১) উদাহরণ। ক, খ, গচ, ঘঙপ যোগ কর।

এ স্থলে যোগফল = ক + খ + গচ + ঘঙপ।

(২) উদাহরণ। ক, খগ, ৩খগ, ৫ঘ^{২}ঙ, ৬ঘ^{২}ঙ যোগ কর।

এ স্থলে যোগফল = ক + খগ + ৩খগ + ৫ঘ^{২}ঙ + ৬ঘ^{২}ঙ
= ক + ৪খগ + ১১ঘ^{২}ঙ।

(৩) উদাহরণ। − ক, − ২খগ, − ৭খগ যোগ কর।

এ স্থলে যোগফল = (− ক) + (− ২খগ) + (− ৭খগ)
= − ক + (− ৯খগ)
= − ক − ৯খগ।

৮। যোজ্যগুলির মধ্যে ধনরাশি ও ঋণরাশি উভয় প্রকার রাশি থাকিলে, সে স্থলে যোগের অর্থ কি তাহা অগ্রে স্থির করিয়া পরে যোগের নিয়ম স্থির করিতে হইবে। কারণ সেরূপ স্থলে যোগশব্দ সচরাচর প্রচলিত অর্থে লওয়া যাইতে পারে না।

যোগের প্রচলিত অর্থ একত্র করা, এবং সে অর্থে ধনরাশি ও ঋণরাশি যোগ করা যায় না। ফলতঃ সেরূপ যোগকে সচরাচর বিয়োগ বলে। এবং সচরাচর প্রচলিত ভাষায় ঋণরাশি বলিয়া কোন পৃথক্ শ্রেণির রাশি নাই, সকল রাশিই ধনরাশি, তবে একরাশি হইতে অপর রাশির বিয়োগ করিতে হইলে সেই বিয়োজ্যরাশিকে ঋণরাশি বলা যায়। কিন্তু একটু বিবেচনা করিয়া দেখিলে বুঝা যায় যে, ঋণরাশি কেবল বীজগণিতের বিষয় নহে, লৌকিক ব্যবহারেও তাহার অস্তিত্ব আছে, যথা, দেনা টাকা। যদি পাওনা টাকাকে ধনরাশি বলা যায়, তবে দেনা টাকাকে ঋণরাশি বলাই উচিত।

সে সকল কথার বিশেষ আলোচনা এই অধ্যায়ের তৃতীয় পরিচ্ছেদে

হইবে। এক্ষণে ঋণরাশি আছে ইহা মানিয়া লইয়া, এবং, তাহা সেই রাশির পরিমাণের বামে ঋণচিহ্ন অর্থাৎ — চিহ্নদ্বারা প্রকাশ করা যাইবে মানিয়া লইয়া, দেখা যাউক সেইরূপরাশি ধনরাশিতে যোগের অর্থ কি।

সহজেই দেখা যাইতেছে এরূপ যোগের অর্থ প্রচলিত ভাষার বিয়োগ। যথা, +ক এবং — খ উভয়ের যোগ ক হইতে খ র বিয়োগ। অর্থাৎ
(+ক) + (−খ) = ক − খ।

তবে এই বিয়োগ এবং পাটীগণিতের বিয়োগের প্রভেদ এই [illegible], পাটীগণিতে ক অর্থাৎ বিযোজন রাশি খ অর্থাৎ বিয়োজ্য রাশি অপেক্ষা বড়, কিন্তু বীজগণিতে খ অপেক্ষা ক বড়ও হইতে পারে ছোটও হইতে পারে, এবং শেষোক্ত স্থলে বিয়োগফলের পরিমাণ খ হইতে ক বাদ দিলে যাহা বাকি থাকে সেই রাশি, ও তাহা ঋণরাশি। যথা,

যদি ক ৪, খ = ৭ হয়,
তবে (+ক) + (−খ) = ক − খ = ৪ − ৭ = −৩।

অর্থাৎ ধনরাশি ও ঋণরাশির যোগফলের পরিমাণ সেই রাশিদ্বয়ের অন্তরজ্ঞাপক রাশি, এবং তাহার প্রকার সেই রাশিদ্বয়ের মধ্যে বৃহত্তর রাশির প্রকার।

৯। উপরে যাহা বলা হইল তাহা একটি ধনরাশির সহিত একটি ঋণ রাশির যোগের কথা। এক্ষণে কতকগুলি ধনরাশির ও কতকগুলি ঋণরাশির একত্র যোগের নিয়ম নিম্নে লিখিত হইতেছে।

যোগের ২য় নিয়ম। উপরের ৭ ধারায় লিখিত যোগের ১ম নিয়ম অনুসারে ধনরাশিগুলির সমষ্টি নিরূপণ কর, এবং ঋণরাশিগুলিকে ধনরাশি মনে করিয়া তাহাদের সমষ্টি নিরূপণ করিয়া শেষোক্ত সমষ্টির প্রত্যেক পদের বামে ঋণচিহ্ন স্থাপন কর। তদনন্তর দুইটি সমষ্টি পর পর লিখ। এবং সমপদ ধনরাশি ও ঋণরাশি থাকিলে তৎপরিবর্তে তাহাদের সাঙ্খ্য প্রকৃতির অন্তরজ্ঞাপক রাশি লিখিয়া তাহার বামে সেই সাঙ্খ্য প্রকৃতির মধ্যে বৃহত্তরটির চিহ্ন স্থাপিত করিয়া তাহার দক্ষিণে সেই পদদ্বয়ের অক্ষরভাগ লিখ।

এই নিয়মের হেতু নিম্নের উদাহরণ দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

উদাহরণ। ৩ক^{২} + ৪খগ − ২ঘ^{৩} − ১০,

৫ক^{২} − ৬খগ + ৩ঘ^{৩} + ১৫,

এবং ৪ক^{২} − ৩খগ + ঘ^{৩} + ২১,

যোগ কর।

এস্থলে যোগফল = (৩ + ৫ + ৪)ক^{২} + (৪ − ৬ − ৩)খগ

+ (− ২ + ৩ + ১)ঘ^{৩} + (− ১০ + ১৫ + ২১)

= ১২ক^{২} + (৪ − ৯)খগ

+ (− ২ + ৪)ঘ^{৩} + (− ১০ + ৩৬)

= ১২ক^{২} − ৫খগ + ২ঘ^{৩} + ২৬।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ।

বিযোগ।

১০। বীজগণিতে যোগ ক্রিয়াতে যেমন যোজ্যগুলি কেবল ধনরাশি, বা কেবল ঋণরাশি, অথবা কতক ধনরাশি ও কতক ঋণরাশি হইতে পারে, বিয়োগ ক্রিয়াতেও তেমনই বিযোজন ও বিযোজ্য কেবল ধনরাশি, বা কেবল ঋণরাশি, বা কতক ধনরাশি কতক ঋণরাশি হইতে পারে।

১১ (১)। বিযোজন ও বিযোজ্য উভয়ই ধনরাশি হইলে বিয়োগফল পরিমাণে তাহাদের অন্তরজ্ঞাপক রাশি হইবে, এবং তাহার প্রকার বিযোজনের যে প্রকার তাহাই হইবে। কিন্তু বিযোজন অপেক্ষা বিযোজ্য বড় হইলে বিয়োগফলের প্রকার বিযোজনের প্রকারের বিপরীত হইবে। ইহার হেতু সহজেই বুঝা যাইতেছে।

যথা $(+ক)-(+খ) = ক-খ$।

$৭-৩=৪$,

$১-৭=-৬$।

এবং সাধারণতঃ, $ক<খ$ হইলে

$ক-খ = -(খ-ক)$।

এইরূপ ছোট রাশি হইতে বড় রাশি বাদ দেওয়া কেবল বীজগণিতের বিয়োগ ক্রিয়ার বিড়ম্বনা নহে, সংসারের বিষয়কর্ম্মেও এরূপ বিড়ম্বনা ঘটে। মনে কর কোন ব্যক্তির ঘরে ৭টি টাকা আছে এবং বাজারে ৩ টাকা দেনা। সে স্থলে দেনা শোধ করিয়া তাহার ঘরে ৪টাকা থাকিবে। কিন্তু তদ্বিপরীতক্রমে যদি তাহার ঘরে কেবল ৩টি টাকা থাকে এবং বাজারে দেনা ৭ টাকা হয়, তবে পাওনাদার পেড়াপীড়ি করিলে সেই ৩টি টাকা সমস্ত দিয়াও তাহার দেনা শোধ হয় না, তখনও ৪ টাকা দেনা থাকে, অর্থাৎ ৩ টাকা হইতে ৭ টাকা বাদ দিলে বাকি ৪ টাকা থাকে এবং তাহা ঋণরাশি, অর্থাৎ ধনরাশির বিপরীত।

১১ (২)। বিযোজন ও বিযোজ্য উভয়েই ঋণবাশি বা কতক ধনবাশি ও কতক ঋণবাশি হইলে বিয়োগ ক্রিয়া কি নিয়মে চলিবে তাহাই এক্ষণে বিবেচ্য।

দেখা যাইতেছে, $ক = ক + খ - খ$, [৫ ধারার (১) দ্রষ্টব্য],

$-ক = -ক + খ - খ$।

$ক - (-খ) = ক + খ$,

$-ক - (-খ) = -ক + খ$।

কারণ, এই সমীকরণদ্বয়ের উভয় দিক হইতে $-খ$ বাদ দিলে বাম দিকে $ক - (-খ)$, বা $-ক - (-খ)$ এবং দক্ষিণদিকে $ক + খ$ বা $-ক + খ$ থাকে, এবং ৫ ধারার (৩) দফা অনুসারে উভয় সমীকরণেই এই বাকি বা বিয়োগফল সমান।

অথবা এই কথা আর এক প্রকারে দেখা যাইতে পারে। যথা, মনে কর ক হইতে $খ - গ$ বাদ দেওয়া যাইবে, অর্থাৎ ধনবাশি খ ও ঋণবাশি গ বাদ দেওয়া যাইবে।

ক হইতে ধনবাশি খ বাদ দিলে,

$বাকি = ক - খ$।

কিন্তু এই বাকি ইষ্ট বিয়োগফল অপেক্ষা ছোট হইতেছে, কারণ ক হইতে যাহা বাদ দিতে হইবে তাহা সমস্ত খ নহে, কিন্তু খ হইতে গ বাদ দিলে যাহা বাকি থাকে কেবল তাহাই মাত্র। এবং খ অপেক্ষা সেই ন্যূনতর বাশি বাদ দিলে যাহা বাকি থাকে তাহা অবশ্যই পূর্ব্বোক্ত বাকি $ক - খ$ অপেক্ষা গ-পরিমাণে বড়। সুতরাং

$ক - (খ - গ) = ক - খ + গ$

অর্থাৎ $-গ$ বা ঋণবাশি গ বিয়োগের অর্থ

$+ গ$ বা ধনরাশি গ যোগ।

এইরূপে $ক - (খ - গ + ঘ) = ক - খ + গ - ঘ$।

এবং $ক - চ - (খ + গ - ঘ) = ক - চ - খ - গ + ঘ$।

অতএব বিয়োগ ক্রিয়ার সাধারণ নিয়ম এই——

বিয়োগের নিয়ম। বিযোজ্যের প্রত্যেক পদের চিহ্ন পরিবর্ত্তিত করিয়া, অর্থাৎ ধনচিহ্নস্থানে ঋণচিহ্ন ও ঋণচিহ্নস্থানে ধনচিহ্ন লিখিয়া, বিযোজনের পরে এই পরিবর্ত্তিত আকারের বিযোজ্য লিখ।

উদাহরণ। ৭ক − ৬খ − ৫গ − (৩ক + ৪খ − ৬গ)
= ৭ক − ৬খ − ৫গ − ৩ক − ৪খ + ৬গ
= ৪ক − ১০খ + গ।

১২। বন্ধনী প্রয়োগ ও মোচন সম্বন্ধে এই শেষোক্ত নিয়ম অবলম্বনীয়
যথা, ক − খ + গ − ঘ = ক − [খ − গ + ঘ]
= ক − [খ − (গ − ঘ)],
কারণ, ক − [খ − (গ − ঘ)] = ক − [খ − গ + ঘ]
= ক − খ + গ − ঘ।
এবং ক − খ + গ − ঘ = (ক − খ) + (গ − ঘ),
কারণ (ক − খ) + (গ − ঘ) = ক − খ + গ − ঘ।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ।

ঋণরাশি।

১৩। পূর্ব্ব পরিচ্ছেদে বলা হইয়াছে, ঋণরাশি কেবল বীজগণিতের বিষয় নহে, সংসারের কার্য্যেও তাহার অস্তিত্ব আছে। (৮ ধারা দ্রষ্টব্য)। এই পরিচ্ছেদে ঋণরাশি সম্বন্ধে আরও কয়েকটি কথা বলা যাইবে।

১৪। বীজগণিতে ঋণরাশিকল্পনা অনেক স্থলে গণিতের প্রক্রিয়ার সাধারণত্ব ও সুবিধা সাধনার্থে প্রয়োজনীয়। নিম্নের দৃষ্টান্তে তাহা দেখা যাইবে।

(১) প্রথমতঃ দেনাপাওনার একটি দৃষ্টান্ত লওয়া যাউক। যথা, মনে কর, এক জনের দুই ব্যক্তির সহিত লেনদেন আছে, এবং তাহার পাওনা প্রথম ব্যক্তির নিকট ক টাকা, দ্বিতীয় ব্যক্তির নিকট খ টাকা, এবং মোট পাওনা ম টাকা,

তাহা হইলে অবশ্যই সে স্থলে ম = ক + খ। (১)

কিন্তু যদি দ্বিতীয় ব্যক্তির নিকট খ টাকা পাওনা না হইয়া খ টাকা দেনা হয়,

তাহা হইলে সে স্থলে ম = ক − খ। (২)

এবং যদি ক অপেক্ষা খ ছোট না হইয়া বড় হয়,

তাহা হইলে সে স্থলে ম = খ − ক, (৩)

এবং ম পাওনা না হইয়া দেনা হইবে।

আবার ক ও খ উভয়ই পাওনা না হইয়া দেনা হইতে পারে, আর

তাহা হইলে সে স্থলে ম = ক + খ (৪)

এবং ম পাওনা না হইয়া দেনা হইবে।

যে কোন রাশি ধনরাশিও হইতে পারে ঋণরাশিও হইতে পারে, রাশির এই প্রকারভেদ যদি মনে রাখি, এবং বামে ধনচিহ্ন + দিয়া ধনরাশি ও বামে ঋণচিহ্ন − দিয়া ঋণরাশি লিখিত হইবে ইহা স্থির করিয়া লই, অর্থাৎ

ক কখন $+$ক, কখন $-$ ক
খ $+$খ, $-$ খ
ম $+$ম, $-$ ম

হইতে পাবে ইহা মনে বাখি,
তাহা হইলে উপবেব (১), (২), (৩), (৪), এই চাবিটি কথাই একটি কথায়, অর্থাৎ

$$ম = ক + খ$$

এই কথায় ব্যক্ত হইতে পাবে, এবং ক, খ, ম, ইহাদেব বামেব $+$ অথবা $-$ চিহ্নদ্বাবা, কোনটি দেনা, কোনটি পাওনা ও কোন্ স্থানে মোট কত দেনা বা পাওনা, সহজেই জানাইয়া দিবে। আব এই শেষোক্ত সমীকবণ উপবেব (১) হইতে (৪) এই চাবিটি স্থলে ক্রমান্বয়ে নিম্নেব চাবিটি আকাব ধাবণ কবিবে—

(১) $ম = ক + খ$, (২) $ম = ক - খ$ (৩) $ম = ক - খ = -(খ - ক)$,
(৪) $ম = -ক - খ = -(ক + খ)$।

(২) দ্বিতীয়তঃ দূরত্ব মাপের একটি দৃষ্টান্ত লওয়া যাউক
মনে কব ক খ গ

ক, খ, গ তিনটি স্থান সমসূত্রে অর্থাৎ এক সবল বেখাতে আছে, এবং
কখ'ব দৈর্ঘ্য $=$ দ হাত
কগ'ব দৈর্ঘ্য $=$ ধ হাত

তাহা হইলে খগ'ব ব্যবধান $=$ ধ $-$ দ হাত (১)

কিন্তু যদি খ ক গ

খ গ উভয়েই ক'ব দক্ষিণে না থাকিয়া, গ দক্ষিণে ও খ বামে থাকে,
তাহা হইলে খগ'ব ব্যবধান $=$ ধ $+$ দ হাত (২)

যদি ক'ব দক্ষিণেব দূবত্বজ্ঞাপক বাশিকে ধনবাশি ও বামেব দূবত্বজ্ঞাপক বাশিকে ঋণবাশি বলিব এবং তাহাদেব একেব বামে $+$ ও অপবেব বামে $-$ চিহ্ন দিব স্থিব কবি, তাহা হইলে

প্রথম স্থলে কখ $= +$দ, কগ $= +$ধ,
কিন্তু দ্বিতীয় স্থলে কখ $= -$দ, কগ $= +$ধ হইবে।
এবং খগ'র ব্যবধান
প্রথমস্থলে $= +$ধ $-(+$দ$) =$ ধ $-$ দ
দ্বিতীয়স্থলে $= +$ধ $-(-$দ$) =$ ধ $+$ দ হইবে।
অর্থাৎ খগ'র ব্যবধান $=$ ধ $-$ দ
উভয় স্থলেই বলা যাইবে।

(৩) তৃতীয়তঃ **কালপরিমাপের** একটি দৃষ্টান্ত লওয়া যাউক। মনে কর কোন ব্যক্তির ক বৎসর বয়সে একটি কন্যা জন্মে, খ বৎসর বয়সে একটি পুত্র জন্মে, এবং গ বৎসর বয়সে আর একটি পুত্র জন্মে, এর মনে কর কন্যাপুত্রদ্বয়ের মধ্যে কে কাহার অপেক্ষা কত বড় বা ছোট ইহাই জিজ্ঞাস্য।

যদি ক $>$ খ, এবং ক $>$ গ হয়,
তাহা হইলে ১ম পুত্র অপেক্ষা কন্যা ক $-$ খ বৎসর বড়, ⎫
ও ২য় পুত্র ক $-$ গ বড়। ⎭ (১)

কিন্তু যদি ক $<$ খ, এবং ক $>$ গ হয়,
তাহা হইলে ১ম পুত্র অপেক্ষা কন্যা খ $-$ ক বৎসর ছোট, ⎫
ও ২য় পুত্র ক $-$ গ বড়। ⎭ (২)

এবং যদি ক $<$ খ, এবং ক $<$ গ হয়,
তাহাহইলে ১ম পুত্র অপেক্ষা কন্যা খ $-$ ক বৎসর ছোট, ⎫
ও ২য় পুত্র গ $-$ ক ছোট। ⎭ (৩)

এরূপ স্থলে যদি ধনরাশি অর্থাৎ $+$ চিহ্নযুক্ত বৎসর **জ্যেষ্ঠত্বজ্ঞাপক**, ও ঋণরাশি অর্থাৎ $-$ চিহ্নযুক্ত বৎসর কনিষ্ঠত্বজ্ঞাপক, বলিয়া মানিয়া লওয়া যায়, তাহা হইলে উপরের (১), (২) ও (৩) এই তিনটি কথাই একটি কথায়, অর্থাৎ উপরের (১) কথায় প্রকাশিত হইবে।

কারণ $ক<খ$ হইলে $ক-খ=-(খ-ক)=খ-ক$ বৎসর ছোট বুঝাইবে

এবং $ক<গ$ হইলে $ক-গ=-(গ-ক)=গ-ক$ বৎসর ছোট বুঝাইবে।

১৫। উপরিউক্তরূপে ধনরাশি ও ঋণরাশি, অর্থাৎ + চিহ্নযুক্ত ও − চিহ্ন-যুক্ত রাশি পরস্পর বিপরীত অর্থজ্ঞাপক হইবে বলিয়া মানিয়া লইলে অনেক স্থলে এক সাঙ্কেতিক বাক্যে অনেক কথা বলা যাইতে পারে।

১৬। বীজগণিতের প্রক্রিয়ায় সংসৃষ্ট রাশির মধ্যে ধনরাশিকে ঋণরাশি মনে করিলে বা ঋণরাশিকে ধনরাশি মনে করিলে সেই প্রক্রিয়ায় কি অর্থ হয় তাহা প্রত্যেক স্থলে দেখা আবশ্যক।

১। উদাহরণমালা।

১। $ক+২খ+৩গ^{২}$, $২ক-৪খ-৬গ^{২}$,

এবং $৩ক+২খ-৪গ^{২}$, যোগ কর।

২। $ক+খ+গ$, $ক+খ-গ$, $ক-খ+গ$,

$-ক+খ+গ$, এবং $-ক-খ-গ$, যোগ কর।

৩। $৩ক^{২}+২খ^{২}-গ^{২}$ হইতে $ক^{২}-৪খ^{২}+৫গ^{২}$ বাদ দেও।

৪। $৫ক-[খ-গ-\{২খ+৩গ-(৪ক+৫খ)\}]$ ইহার বন্ধনী মোচন কর।

৫। $স^{২}+ষ^{২}+শ+(৩স^{২}-২ষ^{২}-শ)-\{৪স^{৩}-(২ষ^{২}-২শ)\}$ ইহাকে সরল আকারে আন।

দ্বিতীয় অধ্যায়।

গুণন, ভাগ, বন্ধনী, বিবিধ সাঙ্কেতিক বাক্য, ও উৎপাদকবিশ্লেষ।

প্রথম পরিচ্ছেদ।

গুণন।

১৭। গুণন ক্রিয়াতে গুণ্য ও গুণক,

(১) একপদ বা অনেক পদ হইতে পারে,

(২) সমচিহ্ন (+বা−) যুক্ত অথবা বিষমচিহ্নযুক্তও হইতে পারে, এবং

(৩) একই অক্ষরের ভিন্ন ভিন্ন শক্তি হইতে পারে।

অর্থাৎ গুণন ক্রিয়া,

(১) $ক \times খ$, $(ক+খ)\times(গ+ঘ)$, বা $(ক-খ)\times(গ-ঘ)$

এই এই আকারের, বা

(২) $(+ক)\times(+খ)$, $(-ক)\times(+খ)$, $(+ক)\times(-খ)$, $(-ক)\times(-খ)$

এই এই আকারেব, অথবা

(৩) $ক^{ন} \times ক^{ম}$

এই আকারেব হইতে পারে।

এবং এই ত্রিবিধ স্থলে কি কি নিয়ম অবলম্বনীয় তাহাই বিবেচ্য।

অর্থাৎ পদ সম্বন্ধীয় নিয়ম,

চিহ্ন সম্বন্ধীয় নিয়ম,

শক্তিসূচক সম্বন্ধীয় নিয়ম,

এই ত্রিবিধ নিয়ম নিরূপণ করিতে হইবে।

১৮। প্রথমতঃ **পদসম্বন্ধীয় নিয়ম।**

ক × খ = কখ ... ...(১)

[৪ ধাবাব (৩) দ্রষ্টব্য]

(ক + খ) × (গ + ঘ) ইহাব অর্থ, (ক + খ) কে গ দিয়া গুণ কবিয়া সেই গুণফলে (ক + খ) কে ঘ দিয়া গুণ কবিয়া যে গুণফল হয তাহা যোগ কবা। এবং (ক + খ) × গ = কগ + খগ, (ক + খ) × ঘ = কঘ + খঘ।

(ক + খ) × (গ + ঘ) = কগ + খগ + কঘ + খঘ (২)

(ক – খ) × (গ – ঘ) ইহাব অর্থ, (ক – খ) কে গ দিয়া গুণ করিয়া সেই গুণফল হইতে (ক – খ) কে ঘ দিয়া গুণ কবিয়া যে গুণফল হয় তাহা বাদ দেওয়া, এবং (ক – খ) × গ = কগ – খগ, (ক – খ) × ঘ = কঘ – খঘ।

(ক – খ) × (গ – ঘ) = কগ – খগ – (কঘ – খঘ)

কগ – খগ – কঘ + খঘ .. (৩)

(১১ ও ১২ ধাবা দ্রষ্টব্য)

১৯। দ্বিতীয়তঃ **চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়ম।**

(+ক) × (+খ) = +কখ, (১)

কারণ, ক পবিমাণ ধনবাশিকে খ পবিমাণ ধনবাশি দিয়া গুণ কবিলে গুণফল খ গুণ ক ধনবাশি হইবে।

(–ক) × (+খ) = –কগ ... (২)

কারণ, ক পবিমাণ ঋণবাশি খ পবিমাণ ধনবাশি দিয়া গুণ কবিলে গুণফল খ গুণ ক ঋণবাশি হইবে।

(+ক) × (–খ) ও (–ক) × (–খ) ইহাদেব অর্থ একটু ভাবিয়া স্থিব কবিতে হইবে। কাবণ গুণ্য **কত বার** লওয়া যাইবে গুণক তাহাই বুঝায়, সুতবাং সচবাচব প্রচলিত গুণনেব অর্থানুসারে গুণক ঋণবাশি হইতে পারে না, কেন না গুণ্য ঋণরাশি বাব লওয়া যাইবে ইহার কোন অর্থ হয় না। তবে ১৩ ধাবায় লিখিত কথাব প্রতি দৃষ্টি বাখিয়া আমবা বলিতে পাবি,

গুণক ধনরাশি হইলে ও গুণ্য ধনরাশি হইলে গুণফল যেমন ধনরাশি বা যোজ্য রাশি হইবে, তেমনই গুণক ঋণরাশি হইলে ও গুণ্য ধনরাশি হইলে গুণফল **তদ্বিপরীত** অর্থাৎ ঋণরাশি বা বিয়োজ্য রাশি হইবে। এবং গুণক ধনরাশি ও গুণ্য ঋণরাশি হইলে গুণফল যেমন ঋণরাশি বা বিয়োজ্য রাশি হয়, তেমনই গুণক ঋণরাশি ও গুণ্য ঋণরাশি হইলে গুণফল **তদ্বিপরীত** অর্থাৎ ধনরাশি বা যোজ্য রাশি হইবে।

$$(+\text{ক})\times(-\text{খ}) = -\text{কখ} \qquad (৩)$$
$$(-\text{ক})\times(-\text{খ}) = +\text{কখ} \qquad (৪)$$

উপরের (১), (২), (৩), (৪) এ চারিটি কথা সঙ্ক্ষেপে এক কথায়, এইরূপ বলা যাইতে পারে,—

গুণ্য ও গুণকের চিহ্ন সমান হইলে গুণফলের চিহ্ন +, অসমান হইলে গুণফলের চিহ্ন —।

২০। তৃতীয়তঃ **শক্তিসূচক সম্বন্ধীয় নিয়ম।**

$\text{ক}^{১} = \text{ক}$,

$\text{ক}^{২} = \text{ক}\times\text{ক}$,

$\text{ক}^{৩} = \text{ক}\times\text{ক}\times\text{ক}$,

$\text{ক}^{ন} = \text{ক}\times\text{ক}\times\text{ক}$ ন সংখ্যক ক উৎপাদকের গুণফল।

$\text{ক}^{ম} = \text{ক}\times\text{ক}\times\text{ক}\times\text{ক}$ / ম ।

$\text{ক}^{১}\times\text{ক}^{২} = \text{ক}\times(\text{ক}\times\text{ক}) = \text{ক}^{৩} = \text{ক}^{১+২}$

$\text{ক}^{২}\times\text{ক}^{৩} = (\text{ক}\times\text{ক})\times(\text{ক}\times\text{ক}\times\text{ক}) = \text{ক}^{৫} = \text{ক}^{২+৩}$

...

$ক^{ন} \times ক^{ম} = ক \times ক \times$ (নসংখ্যক) $\times ক \times ক \times ক$ . . (মসংখ্যক)
$= ক \times ক \times \quad \times ক \times ক \times$ (ন+ম) সংখ্যক
$= ক^{ন+ম}$।

২১। $ক^{ন}খ^{ন} = ক \times ক \times ক$ ন সংখ্যক $\times খ \times খ$ ন সংখ্যক
$= কখ \times কখ \times$ ন সংখ্যক $= (কখ)^{ন}$

২২। গুণ্য ও গুণক উভয়ই অনেকপদ রাশি হইলে তাহাদের **গুণনের নিয়ম** এই—

গুণ্য ও গুণক উভয়কেই কোন একটি অক্ষরের শক্তি চিহ্নক্রমে সাজাইয়া, গুণ্যের নীচে গুণককে লিখ। তাহার পর গুণকের প্রত্যেক পদদ্বারা একে একে গুণ্যের সমস্ত পদকে গুণ করিয়া এক এক পংক্তিতে লিখ। সেই পংক্তিগুলির যোগফলই গুণফল।

এই নিয়মের হেতু এবং গুণ্য ও গুণককে কোন একটি অক্ষরের শক্তি-চিহ্নক্রমে সাজাইবার প্রয়োজন, নিম্নের উদাহরণ দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

(১) উদাহরণ। $ক^{২} + ২কখ + খ^{২}$ এই রাশিকে $ক + খ$ দিয়া গুণ কর।

প্রথমতঃ ক'র শক্তিচিহ্নক্রমে সাজান যাউক।

$$\begin{array}{l} ক^{২} + ২কখ + খ^{২} \\ ক + খ \\ \hline ক^{৩} + ২ক^{২}খ + কখ^{২} \\ \quad + ক^{২}খ + ২কখ^{২} + খ^{৩} \\ \hline ক^{৩} + ৩ক^{২}খ + ৩কখ^{২} + খ^{৩} \end{array}$$

দ্বিতীয়তঃ কোন অক্ষরের শক্তিচিহ্নক্রমে না সাজাইয়া দেখা যাউক।

$$\begin{array}{l} ক^{২} + খ^{২} + ২কখ \\ + খ + ক \\ \hline + ক^{২}খ + খ^{৩} + ২কখ^{২} \\ ক^{৩} + কখ^{২} + ২ক^{২}খ \\ \hline + ক^{২}খ + খ^{৩} + ২কখ^{২} + ক^{৩} + কখ^{২} + ২ক^{২}খ \\ = ক^{৩} + ৩ক^{২}খ + ৩কখ^{২} + খ^{৩}। \end{array}$$

প্রথমবারের সাজানতে যোগফল যেমন সহজে শক্তিচিহ্নক্রমে পাওয়া গেল, দ্বিতীয় স্থলে তেমন হইল না।

(২) উদাহরণ। $(ক+খ)\times(ক+খ)$ ইহার গুণফল কত ?

$$
\begin{array}{l}
ক + খ \\
ক + খ \\
\hline
ক^২ + কখ \\
\quad\quad কখ + খ^২ \\
\hline
ক^২ + ২কখ + খ^২
\end{array}
$$

(৩) উদাহরণ। $(ক-খ)\times(ক-খ)$ ইহার গুণফল কত ?

$$
\begin{array}{l}
ক - খ \\
ক - খ \\
\hline
ক^২ - কখ \\
\quad\quad - কখ + খ^২ \\
\hline
ক^২ - ২কখ + খ^২
\end{array}
$$

(৪) উদাহরণ। $(ক+খ)\times(ক-খ)$ ইহার গুণফল কত ?

$$
\begin{array}{l}
ক + খ \\
ক - খ \\
\hline
ক^২ + কখ \\
\quad\quad - কখ - খ^২ \\
\hline
ক^২ \quad - \quad খ^২
\end{array}
$$

(৫) উদাহরণ। $(ক+খ)(ক^২-কখ+খ^২)$ ইহার গুণফল কত ?

$$
\begin{array}{l}
ক^২ - কখ + খ^২ \\
ক + খ \\
\hline
ক^৩ - ক^২খ + কখ^২ \\
\quad\quad + ক^২খ - কখ^২ + খ^৩ \\
\hline
ক^৩ \quad + \quad খ^৩
\end{array}
$$

(৬) উদাহরণ। $(ক-খ)(ক^2+কখ+খ^2)$ ইহার গুণফল কত ?

$$
\begin{array}{l}
ক^2+কখ+খ^2 \\
ক-খ \\
\hline
ক^3+ক^2খ+কখ^2 \\
\quad -ক^2খ-কখ^2-খ^3 \\
\hline
ক^3 \qquad - \qquad খ^3
\end{array}
$$

২৩। উপরের ২২ ধারার উদাহরণ ৬টির ফল মনে রাখা আবশ্যক। তাহা নিম্নে লিপিবদ্ধ করা গেল।

$$(ক+খ)^2=ক^2+২কখ+খ^2 \qquad (১)$$

$$(ক-খ)^2=ক^2-২কখ+খ^2 \qquad (২)$$

$$ক^2-খ^2=(ক+খ)(ক-খ) \qquad (৩)$$

$$(ক+খ)^3=ক^3+৩ক^2খ+৩কখ^2+খ^3 \qquad (৪)$$

$$(ক-খ)^3=ক^3-৩ক^2খ+৩কখ^2-খ^3 \qquad (৫)$$

$$ক^3+খ^3=(ক+খ)(ক^2-কখ+খ^2) \qquad (৬)$$

$$ক^3-খ^3=(ক-খ)(ক^2+কখ+খ^2) \qquad (৭)$$

উপরের সাঙ্কেতিক বাক্যগুলিতে আর একটি অতি প্রয়োজনীয় কথা লক্ষ্য করিয়া দেখিবে।

(১) সাম্যে খ'র স্থলে $-খ$ লিখিলেই (২) সাম্য পাইবে।

যথা—

$$\{ক+(-খ)\}^2=(ক-খ)^2=ক^2+২ক\times(-খ)+(-খ)\times(-খ)$$
$$=ক^2-২কখ+খ^2\text{।}$$

সেইরূপে (৪) সাম্যে খ'র স্থলে $-খ$ লিখিলে (৫) সাম্য পাইবে। যথা,

$$\{ক+(-খ)\}^3=(ক-খ)^3=ক^3+৩ক^2\times(-খ)+৩ক\times(-খ)\times(-খ)$$
$$+(-খ)\times(-খ)\times(-খ)$$
$$=ক^3-৩ক^2খ+৩কখ^2-খ^3\text{।}$$

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ।

ভাগ।

১৪। ভাগক্রিয়াতে ভাজ্য ও ভাজক,

(১) সমচিহ্ন (+ বা −) বা বিষম চিহ্ন যুক্ত হইতে পারে,

(২) একই অক্ষরের ভিন্ন ভিন্ন শক্তি হইতে পারে,

(৩) একপদ বা বহুপদ হইতে পারে।

অর্থাৎ ভাগক্রিয়া,

(১) $(+স)-(+ষ), (-স)-(-ষ), (+স)-(-ষ), (-স)-(+ষ)$

এই এই আকারের, বা

(২) $ক^{ম}-ক^{ন}$

এই আকারের, বা

(৩) $ক^{৩}খ^{১}গ-ক^{২}খগ$, কি

$(কস^{২}+২কস+স^{২})\div(ক+স)$

এই এই আকারের হইতে পারে।

এবং এই ত্রিবিধ স্থলে কি কি নিয়ম অবলম্বনীয় তাহাই বিবেচ্য।

অর্থাৎ চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়ম,

শক্তি সূচক সম্বন্ধীয় নিয়ম,

এবং পদ সম্বন্ধীয় নিয়ম,

এই ত্রিবিধ নিয়ম নিরূপণ করিতে হইবে।

১৫। প্রথমতঃ **চিহ্ন সম্বন্ধীয় নিয়ম।**

গুণন ক্রিয়াতে দেখা গিয়াছে (১৯ ধারা দ্রষ্টব্য)

$(+ক)\times(+খ)=+কখ,$

$(+কখ)\div(+ক)=+খ।$ (১)

$(-ক)\times(+খ)=-কখ,$

$(-কখ)\div(-ক)=+খ।$ (২)

$(-ক)\times(-খ)=+কখ,$

$(+কখ)\div(-ক)=-খ$ (৩)

এবং $(+ক)\times(-খ)=-কখ,$

$(-কখ)\div(+ক)=-খ$ (৪)

উপরের (১), (২), (৩), (৪) এই চারিটি কথা সংক্ষেপে এক কথায় এইরূপে বলা যাইতে পারে—

ভাজ্য ও ভাজকের চিহ্ন সমান হইলে ভাগফলের চিহ্ন+, অসমান হইলে ভাগফলের চিহ্ন—।

১৬। **দ্বিতীয়তঃ শক্তিসূচক সম্বন্ধীয় নিয়ম**

পূর্ব্বে দেখা গিয়াছে (২০ ধারা দ্রষ্টব্য)

$ক^ন\times ক^ম=ক^{ন+ম},$

$ক^{ন+ম}\div ক^ন=ক^ম=ক^{(ন+ম)-ন}।$

অর্থাৎ ভাজ্য ও ভাজকের শক্তিসূচকের বিয়োগফলই ভাগ ফলের শক্তিসূচক।

এস্থলে ভাজ্যের শক্তিসূচক ভাজকের শক্তিসূচক অপেক্ষা বড় ইহা মানিয়া লওয়া হইল।

এই কথা আর এক প্রকারে সপ্রমাণ করা যাইতে পারে।

$$ক^{ম} = ক \times ক \times ক \times \cdots \quad (\text{ম সংখ্যক উৎপাদক})$$

$$ক^{ন} = ক \times ক \times ক \times \cdots \quad (\text{ন সংখ্যক উৎপাদক})$$

$$ক^{ম} \div ক^{ন} = \frac{ক \times ক \times ক \times \cdots (\text{ম সংখ্যক উৎপাদক})}{ক \times ক \times ক \times \cdots (\text{ন সংখ্যক উৎপাদক})}$$

$$= \frac{ক \times ক \times \cdots (\text{ন সংখ্যক উৎপাদক}) \times ক \times ক \times \cdots [(ম\text{-}ন) \text{ সংখ্যক উৎপাদক}]}{ক \times ক \times \cdots (\text{ন সংখ্যক উৎপাদক})}$$

(যদি ম > ন)

$$= ক \times ক \times \cdots [(ম - ন) \text{ সংখ্যক উৎপাদক}]$$

$$= ক^{ম-ন}। \qquad (১)$$

কিন্তু যদি ম < ন, তাহা হইলে

$$ক^{ম} \div ক^{ন} = \frac{ক \times ক \times \cdots (\text{ম সংখ্যক উৎপাদক})}{ক \times ক \times \cdots (\text{ম সংখ্যক}) \times ক \times ক [(ন - ম) \text{ সংখ্যক উৎপাদক}]}$$

$$= \frac{১}{ক \times ক \times \cdots [(ন - ম) \text{ সংখ্যক উৎপাদক}]}$$

$$= \frac{১}{ক^{ন-ম}}। \qquad (২)$$

এক্ষণে দেখা যাউক (১) ও (২) এই দুইটি কথা কোন প্রকারে এক কথায় অর্থাৎ একই সাঙ্কেতিক চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ করা যায় কি না।

এই বিষয় দেখিতে গেলেই দেখা আবশ্যক

$ক^{ম-ন}$ এবং $\frac{১}{ক^{ন-ম}}$ ইহাদের কিরূপ সম্বন্ধ।

$\frac{১}{ক^{ন-ম}}$ দেখা যাইতেছে $ক^{ন-ম}$ এর অন্যোন্যক,

এবং $ক^{ন-ম}$ এর শক্তিসূচক $ক^{ম-ন}$ এর শক্তিসূচকের সহিত পরিমাণে সমান ও প্রকারে অসমান,

$$\text{কারণ} \quad ন - ম = -(ম - ন)।$$

কিন্তু যদি $ম < ন$,

তাহা হইলে $ন - ম$ ধনবাশি

ও $ম - ন$ তত্তুল্য পরিমাণ ঋণবাশি।

এবং $ক^{ন-ম} = ক \times ক \times$ [$(ন-ম)$ সংখ্যক উৎপাদক]

অর্থাৎ ক কে উৎপাদক রূপে $(ন-ম)$ বাব লইয়া তাহাব গুণফল।

কিন্তু $ক^{-(ম-ন)}$ ইহাব উক্তরূপ কোন অর্থ হয় না।

কাবণ,—$(ম-ন)$ বাব ককে উৎপাদক রূপে লওয়ার কোন অর্থ নাই।

তবে দেখা যাউক শক্তিসূচকেব যেটি মূল নিয়ম,

অর্থাৎ $ক^{ন} \times ক^{ম} = ক^{ন+ম}$ (২০ ধাবা দ্রষ্টব্য),

তাহাব সহিত সঙ্গতি বাখিয়া $ক^{-(ম-ন)}$ অথবা $ক^{-ন}$ ইহাব অর্থাৎ শক্তিসূচক ঋণবাশিব কি অর্থ হইতে পাবে।

$$যখন\ ক^{ন} \times ক^{ম} = ক^{ন+ম},$$

$$তখন\ সেই\ নিয়মে,\ ক^{ন+ম} \times ক^{-ন} = ক^{ন+ম-ন}$$

$$= ক^{ম}।$$

$$কিন্তু\quad ক^{ন+ম} \times \frac{১}{ক^{ন}} = ক^{ন} \times ক^{ম} \times \frac{১}{ক^{ন}}$$

$$= ক^{ম}।$$

$$ক^{ন} = \frac{১}{ক^{ন}}।$$

সুতবাং যদি $ম < ন$,

$$তবে\ ক^{ম-ন} = ক^{-(ন-ম)} = \frac{১}{ক^{ন-ম}}।$$

অতএব ম $>$ ন বা $<$ ন যাহাই হউক, উভয় স্থলেই

$$ক^{ম} \div ক^{ন} = ক^{ম-ন}$$

বলা যাইতে পারে, যদি মনে রাখা যায় যে

$$ম < ন \text{ হইলে } ক^{ম-ন} = ক^{-(ন-ম)} = \frac{১}{ক^{ন-ম}}।$$

এবং এই ভাবে লইলে উপরের (১) ও (২) উভয় কথাই এক কথায় প্রকাশ করা গেল।

১৭। উপরে যাহা বলা হইল তদনুসারে

$$ক^{ন} \times ক^{-ন} = ক^{ন-ন} = ক।$$

এবং $ক^{ন} \times ক^{-ন} = ক^{ন} \times \frac{১}{ক^{ন}} = ১$।

$$ক = ১।$$

২৮। তৃতীয়তঃ **পদসম্বন্ধীয় নিয়ম।**

(১) যদি ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই একপদ হয়, তাহা হইলে ভাজ্যের প্রকৃতি ভাজকের প্রকৃতি দ্বারা ভাগ করিয়া ভাগফলের প্রকৃতি পাওয়া যাইবে, এবং ভাজ্যের প্রত্যেক অক্ষরের শক্তি ভাজকের সেই সেই অক্ষরের শক্তি দ্বারা শক্তিসূচক সম্বন্ধীয় নিয়মানুসারে ভাগ করিয়া সেই সেই ভাগফল ক্রমান্বয়ে পর পর লিখিবে, এবং ভাজ্যের অবশিষ্ট যে যে অক্ষর ভাজকে অবশিষ্ট যে যে অক্ষর দ্বারা ভাগ করা যায় না তন্মধ্যে ভাজ্যের অক্ষরগুলি উপরে ও ভাজকের অক্ষরগুলি একটি রেখার নিম্নে লিখিয়া অপর ভাগফলের পরে লিখিবে। এবং তাহা হইলেই সম্পূর্ণ ভাগফল পাওয়া যাইবে।

যথা—

(১) $৬ক^{৩}খ^{২}গঘ \div ৩ক^{২}খগ^{২}$

$$= \frac{৬ক^{৩}খ^{২}গঘ}{৩কখ^{২}গ^{২}} = \frac{৬ \times ক^{৩} \times খ^{২} \times গ \times ঘ}{৩ \times ক^{২} \times খ \times গ^{২}}$$

$$= \frac{৬}{৩} \times \frac{ক^{৩}}{ক^{২}} \times \frac{খ^{২}}{খ} \times \frac{গ}{গ^{২}} \times ঘ \quad = ২কখগ^{-১}ঘ = \frac{২কখঘ}{গ}।$$

(১) $\frac{৪ক^{৫}খ^{৩}গঘ}{২ক^{৩}খ^{২}চ} = \frac{৪}{২} \times \frac{ক^{৫}}{ক^{৩}} \times \frac{খ^{৩}}{খ^{২}} \times \frac{গঘ}{চ}$

$$২কখ\frac{গঘ}{চ}।$$

(২) যদি ভাজ্য বহুপদ ও ভাজক একপদ হয় তাহা হইলে উপরের নিয়মানুসারে ভাজ্যের প্রত্যেক পদকে ভাজকদ্বারা ভাগ করিয়া প্রত্যেক ভাগফল উপরের চিহ্নসম্বন্ধীয় নিয়মানুসারে উপযুক্ত চিহ্নযুক্ত করিয়া পর পর লিখিলেই সম্পূর্ণ ভাগফল পাওয়া যাইবে।

যথা, $(৬ক^{৩}খ^{২}গ^{২} - ৪ক^{২}খ^{৩}ঘ + ২কখচ) \div ২কখ$

$$= \frac{৬ক^{৩}খ^{২}গ^{২}}{২কখ} - \frac{৪ক^{২}খ^{২}ঘ}{২কখ} + \frac{২কখচ}{২কখ}$$

$$= ৩ক^{২}খগ^{২} - ২কখঘ + চ।$$

(৩) যদি ভাজ্য ও ভাজক উভয়ই একাধিক পদ হয়, তাহা হইলে নিম্নলিখিত নিয়ম অবলম্বনীয়।

ভাজ্য ও ভাজক উভয়ের কোন একটি বিশিষ্ট অক্ষরের শক্তিক্রমানুযে উভয়কে সাজাইয়া, ভাজ্যের বামে ভাজককে লিখ। এবং ভাজ্যের প্রথম পদ ভাজকের প্রথম পদ দ্বারা ভাগ করিয়া সেই ভাগফল ভাজ্যের দক্ষিণে লিখ। তাহাই ইষ্ট ভাগফলের প্রথম পদ। পরে তদ্দ্বারা ভাজকের গুনন করিয়া সেই গুণফল ভাজ্য হইতে বাদ দিয়া বাকী ভাজ্যের নিম্নে লিখ, ও তাহাকেই নূতন ভাজ্য মনে করিয়া পূর্ব্ব প্রক্রিয়া চালাও, এবং এবার যে আংশিক ভাগফল পাইবে তাহা পূর্ব্বোক্ত ভাগফলের পরে উপযুক্ত চিহ্নসহ লিখ। তাহাই ইষ্ট ভাগফলের দ্বিতীয় পদ।

এইরূপ প্রক্রিয়া যতদূর চলে চালাও। ভাগশেষ থাকিলে তাহাকে লব ও ভাজককে হর স্বরূপ লইয়া যে ভগ্নাংশ হয় তাহা ভাগফলের পরে লিখ। তাহা হইলেই সম্পূর্ণ ভাগফল পাওয়া যাইবে।

এই নিয়মের হেতু নিম্নের উদাহরণ দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

(১) উদাহরণ। $ক^৩ - খ^৩ - ৩ক^২খ + ৩কখ^২$ ইহাকে
$ক^২ + খ^২ - ২কখ$ দিয়া ভাগ কব।

এ স্থলে ক এব শক্তি ক্রমে সাজাইলে,

ভাজ্য $= ক^৩ - ৩ক^২খ + ৩কখ^২ - খ^৩$ ভাজক $= ক^২ - ২কখ + খ^২$

$$
\begin{array}{r|l}
ক^২ - ২কখ + খ^২ & ক^৩ - ৩ক^২খ + ৩কখ^২ - খ^৩ \;(ক - খ \\
 & ক^৩ - ২ক^২খ + \quad কখ^২ \\ \hline
 & - \; ক^২খ + ২কখ^২ - খ^৩ \\
 & - \; ক^২খ + ২কখ^২ - খ^৩ \\ \hline
\end{array}
$$

এথানে ভাজ্য হইতে ভাজক ক গুণ লইয়া যাহা বাকী থাকে তাহা হইতে পুনবায়—খ গুণ লওয়াতে কিছুই বাকী বহিল না, অতএব ভাগফল, $ক - খ$।

ইহাব প্রমাণ। $(ক^২ - ২কখ + খ^২) \times (ক - খ)$
$= ক^৩ - ৩ক^২খ + ৩কখ^২ - খ^৩$।

(২) উদাহবণ। $ক^৩ + ৪ক^২খ + ৪কখ^২ + খ^৩$ ইহাকে
$ক^২ + ২কখ + খ^২$ দিয়া ভাগ কব।

$$
\begin{array}{r|l}
ক^২ + ২কখ + খ^২ & ক^৩ + ৪ক^২খ + ৪কখ^২ + খ^৩ \;(ক + ২খ \\
 & ক^৩ + ২ক^২খ + \quad কখ^২ \\ \hline
 & ২ক^২খ + ৩কখ^২ + খ^৩ \\
 & ২ক^২খ + ৪কখ^২ + ২খ^৩ \\ \hline
 & - কখ^২ - খ^৩ \\
\end{array}
$$

অতএব সম্পূর্ণ ভাগফল $= ক + ২খ - \dfrac{কখ^২ + খ^৩}{ক^২ + ২কখ + খ^২}$।

প্রমাণ। $(ক^২ + ২কখ + খ^২) \times \left(ক + ২খ - \dfrac{কখ^২ + খ^৩}{ক^২ + ২কখ + খ^২}\right)$

$= (ক^২ + ২কখ + খ^২) \times \left(ক + খ + খ - \dfrac{কখ^২ + খ^৩}{ক^২ + ২কখ + খ^২}\right)$

$= (ক^২ + ২কখ + খ^২) \times (ক + খ)$

$+ (ক^২ + ২কখ + খ^২) \times \dfrac{ক^২খ + ২কখ^২ + খ^৩ - কখ^২ - খ^৩}{ক^২ + ২কখ + খ^২}$

$= ক^৩ + ৩ক^২খ + ৩কখ^২ + খ^৩ + ক^২খ + কখ^২$

$= ক^৩ + ৪ক^২খ + ৪কখ^২ + খ^৩$।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ।

বন্ধনী।

২৯। বন্ধনী প্রয়োগ ও মোচন বীজগণিতেব বিশেষ প্রয়োজনীয় প্রক্রিয়া। পাটীগণিতে বলা হইয়াছে (৯ ধারা দ্রষ্টব্য)
বন্ধনীব অন্তর্গত রাশিগুলির পবস্পবসম্বন্ধীয় ক্রিয়া অগ্রে সম্পন্ন কবিতে হয়, এবং বন্ধনীক অন্তর্গত বাশিগুলিকে একটি বাশি মনে কবিতে হয়।

অর্থাৎ দৃশ্যতঃ অনেক হইলে এবং কার্য্যতঃ একই হইলে সেইরূপ অনেকগুলি বাশিব একতা প্রদর্শনার্থে বন্ধনী প্রয়োগ একটি সুন্দব উপায়।

যথা, যদি ক হইতে খ+গ অথবা খ−গ এই যোগ ফল বা বিয়োগফল বাদ দিতে হয়, তাহা হইলে যাহা বাকী থাকে,

তাহা=ক−(খ+গ) অথবা=ক−(খ−গ) এইরূপ লিখিত হইতে পাবে।

অথবা কস^{২}+খস+গস+ঘ ইহাকে

স'ব শক্তিক্রমে সাজাইলে

কস^{২}+(খ+গ) স+ঘ

এরূপে লেখা যাইতে পাবে।

এইরূপ অন্যান্য অনেক স্থলে বন্ধনী প্রয়োগ দ্বারা বাশিমালাকে সুবিধা-জনক আকাবে লেখা যাইতে পারে।

৩০। বন্ধনী প্রয়োগ সম্বন্ধে প্রধানতঃ এই কয়েকটি বিষয় বিবেচ্য।—

(১) চিহ্ন সম্বন্ধীয় অর্থাৎ পদগুলিব ধনচিহ্ন বা ঋণচিহ্ন সম্বন্ধীয় নিয়ম।

(২) শক্তিসূচক সম্বন্ধীয় নিয়ম।

(৩) অক্ষরবিন্যাস সম্বন্ধীয় নিয়ম।

(৪) বন্ধনীব মধ্যে বন্ধনীপ্রয়োগ সম্বন্ধীয় নিয়ম।

৩১। প্রথমতঃ বন্ধনীবদ্ধ পদের **চিহ্ন সম্বন্ধীয় নিয়ম।** পূর্ব্বেই এই নিয়মের এক প্রকার আভাস দেওয়া হইয়াছে। (১২ ধাবা দ্রষ্টব্য)। সে নিয়ম এই—

যদি বন্ধনীর পূর্ব্বে +ধনচিহ্ন থাকে তবে যে সকল পদ বন্ধনীবঅন্তর্গত

করা যাইবে তাহাদের প্রত্যেকের পূর্ব্বচিহ্ন বজায় থাকিবে। যদি বন্ধনীর পূর্ব্বে —ঋণচিহ্ন থাকে তবে যে সকল পদ বন্ধনীর অন্তর্গত করা যাইবে তাহাদের প্রত্যেকেরই চিহ্নের পরিবর্ত্তে তদবিপরীত চিহ্ন বসিবে।

যথা $ক+খ-গ-ঘ+ঙ$

$=ক+(খ-গ-ঘ+ঙ)$ (১)

$=ক+খ-(গ+ঘ-ঙ)$. (২)

কারণ $ক+(খ-গ-ঘ+ঙ) = ক+খ-গ-ঘ+ঙ$

এবং $ক+খ-(গ+ঘ-ঙ) = ক+খ-গ-ঘ+ঙ$।

(১১ ও ১২ ধারা দ্রষ্টব্য।

৩২। দ্বিতীয়তঃ বন্ধনী প্রয়োগে **শক্তিসূচক সম্বন্ধীয় নিয়ম।**

শক্তিসূচক সম্বন্ধীয় মূল সূত্র এই (২০ ধারা দ্রষ্টব্য)—

$$ক^{ন} \times ক^{ম} = ক^{ন+ম} \qquad (১)$$

এবং তৎসম্বন্ধে আর দুটি নিয়ম এই (২৬, ২৭ ধারা দ্রষ্টব্য)—

$$ক^{-ন} = \frac{১}{ক^{ন}} \qquad .. \qquad (২)$$

$$ক^{০} = ১ \qquad (৩)$$

এ স্থলে ন ও ম ধনরাশি বা ঋণরাশি হইতে পারে, কিন্তু তাহারা অখণ্ড রাশি ইহা মানিয়া লওয়া হইয়াছে।

শক্তিসূচকের আর একটি নিয়ম আছে, তাহা এই—

$$(ক^{ন})^{ম} = ক^{নম} \qquad (৪)$$

কারণ $(ক^{ন})^{ম} = ক^{ন} \times ক^{ন} \times ক^{ন} \times$ (ম সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$= ক^{ন+ন+ন+}$. (ম সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত)।

$= ক^{নম}$।

উপবেব (১), (২), (৩), (৪) এই চাবিটি সাম্য মনে বাখিলেই শক্তিসূচক সম্বন্ধে বন্ধনী প্রয়োগেব কার্য্য চলিবে।

যথা, $ক^{৩}স^{২} + ক^{২}স^{২} + কস^{২} + খ^{২}স + খস + গ$
$= (ক^{২} + ব^{১} + ক^{০})\,কস^{২} + (খ^{১} + খ^{০})\,খস + গ।$
$= (ক^{২} + ক + ১)কস^{২} + (খ + ১)\,খস + গ।$

$ক^{৮}খ^{৬} + ২ক^{৪}খ^{৩}গ^{২} + গ^{৪}$
$= (ক^{৪}খ^{৩})^{২} + ২ক^{৪}খ^{৩}গ^{২} + (গ^{২})^{২}$
$= (ক^{৪}খ^{৩} + গ^{২})^{২}।$

৩৩। তৃতীয়তঃ বন্ধনী প্রয়োগে **অক্ষর বিন্যাস** সম্বন্ধীয় নিয়ম।

অক্ষব বিন্যাসেব কোন ধবা বাঁধা নিয়ম নাই।

কোন বহুপদ রাশিমালাকে এক আকাব হইতে অন্য আকাবে পবিবর্ত্তিত কবিতে হইলে প্রত্যেক স্থলে নূতন নিয়ম অবলম্বন কবিতে হয়, এবং সেই সকল নিয়ম কেবল অভ্যাসেব দ্বাবা জানা যায়।

নিম্নেব উদাহরণ দৃষ্টে এই কথা স্পষ্ট প্রতীয়মান হইবে।

(১) উদাহবণ। $১৬ক^{৬}খ^{৬} - ২০ক^{৪}খ^{৪} + ৪ক^{২}খ^{২}$ ইহাকে দুইটি ত্রিপদ উৎপাদকে বিশ্লিষ্ট কব।

$১৬ক^{৬}খ^{৬} - ২০ক^{৪}খ^{৪} + ৪ক^{২}খ^{২}$
$= ৪ক^{২}খ^{২}(৪ক^{৪}খ^{৪} - ৫ক^{২}খ^{২} + ১)$
$= ৪ক^{২}খ^{২}(৪ক^{৪}খ^{৪} - ৪ক^{২}খ^{২} + ১ - ক^{২}খ^{২})$
$= ৪ক^{২}খ^{২}\{(২ক^{২}খ^{২})^{২} - ৪ক^{২}খ^{২} + ১ - (কখ)^{২}\}$
$= ৪ক^{২}খ^{২}\{(২ক^{২}খ^{২} + ১)^{২} - (কখ)^{২}\}$
$= ৪ক^{২}খ^{২}(২ক^{২}খ^{২} + ১ + কখ)(২ক^{২}খ^{২} + ১ - কখ)$
$= ৪কখ^{২}(২ক^{২}খ^{২} + কখ + ১)(২ক^{২}খ^{২} - কখ + ১)।$

(২) উদাহবণ। $ক^{৩} + খ^{৩}গ^{৩} - ৩কখগ$ ইহাকে $ক + খ + গ$ দিয়া ভাগ কর।

ক'র শক্তি ক্রমে সাজাইলে প্রক্রিয়া এইরূপ হয় :—

ক + খ + গ) ক^{৩} − ৩কখগ + খ^{৩} + গ^{৩} (ক^{২} − কখ − কগ − খগ + খ^{২} + গ^{২}

ক^{৩} + ক^{২}খ + ক^{২}গ

− ক^{২}খ − ক^{২}গ − ৩কখগ

− ক^{২}খ − কখ^{২} − কখগ

− ক^{২}গ − ২কখগ + কখ^{২}

− ক^{২}গ − কখগ − কগ^{২}

− কখগ + কখ^{২} + কগ^{২}

− কখগ − খ^{২}গ − খগ^{২}

কখ^{২} + কগ^{২} + খ^{২}গ + খগ^{২} + খ^{৩} + গ^{৩}

কখ^{২} + খ^{২}গ + খ^{৩}

কগ^{২} + খগ^{২} + গ^{৩}

কগ^{২} + খগ^{২} + গ^{৩}

ভাগফল = ক^{২} + খ^{২} + গ^{২} − কখ − খগ − গক

এইবার দেখা যাউক বন্ধনী প্রয়োগে প্রক্রিয়া কিরূপ হয়

ক + (খ + গ)) ক^{৩} − ৩কখগ + খ^{৩} + গ^{৩} (ক^{২} − (খ + গ)ক + (খ^{২} − খগ + গ^{২})

ক^{৩} + (খ + গ) ক^{২}

− (খ + গ) ক^{২} − ৩কখগ

− (খ + গ) ক^{২} − (খ + গ)^{২} ক

(খ^{২} − খগ + গ^{২}) ক + খ^{৩} + গ^{৩}

(খ^{২} − খগ + গ^{২}) ক + খ^{৩} + গ^{৩}

(২২ ধারার ৫ উদাহরণ দ্রষ্টব্য)

ভাগফল = ক^{২} + খ^{২} + গ^{২} − কখ − খগ − গক।

উপরের এই দুইটি ভাগপ্রক্রিয়া তুলনা করিয়া দেখিলেই বন্ধনী-প্রয়োগের সুবিধা স্পষ্ট প্রতীয়মান হইবে।

৩৬। চতুর্থতঃ **বন্ধনীর মধ্যে বন্ধনী প্রয়োগ সম্বন্ধীয় নিয়ম।**

উপরের ৩১ ও ৩২ ধারার অর্থাৎ চিহ্নের ও শক্তিসূচকের নিয়মের প্রতি দৃষ্টি রাখিয়া, প্রয়োগ কালে সর্ব্বাগ্রে সর্ব্বাপেক্ষা অধিক ব্যাপক বন্ধনী, তদনন্তর অপেক্ষাকৃত অল্পব্যাপক বন্ধনী, তৎপরে তদপেক্ষা অল্পতর ব্যাপক বন্ধনীর প্রয়োগ করিবে; এবং বন্ধনীমোচন কালে তদ্বিপরীত ক্রম অবলম্বন করিবে।

এই নিয়মের অর্থ ও কার্য্য নিম্নের উদাহরণ দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

১) উদাহরণ। কখগ − কষস − খশস + শষস + কশস − খষস + গশষস

ইহাতে বন্ধনী প্রয়োগ কর।

কখগ − কষস − খশস + শষস + কশস − খষস + গশষস
= কখগ − [কষ + খশ − শষ − কশ + খষ − গশষ] স
= কখগ − [{ক + খ − গশ − শ} ষ − (ক − খ)শ] স।

২) উদাহরণ। ক − (খ − গ) − [ক − খ − গ − ২{খ + গ − ৩(গ − ক) − ঘ}]

ইহার বন্ধনীমোচন কর।

ক − (খ − গ) − [ক − খ − গ − ২{খ + গ − ৩(গ − ক) − ঘ}]
= ক − খ + গ − [ক − খ − গ − ২{খ + গ − ৩গ + ৩ক − ঘ}]
= ক − খ + গ − [ক − খ − গ − ২খ − ২গ + ৬গ − ৬ক + ২ঘ]
= ৬ক + ২খ − ২গ − ২ঘ।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ।

বিবিধ সাঙ্কেতিক বাক্য ও উৎপাদক বিশ্লেষ।

৩৫। সহজেই দেখা যাইতেছে

$$ক + খ = খ + ক \qquad (১)$$

এবং দেখা গিয়াছে (পাটীগণিতের ৩৩ ধারা দ্রষ্টব্য)

$$ক \times খ = খ \times ক \qquad (২)$$

কিন্তু $ক - খ \neq খ - ক$,

$$তবে\quad ক - খ = -(খ - ক) \qquad (৩)$$

কারণ, $-(খ - ক) = (ক - খ)$ (১১ ধারা দ্রষ্টব্য)

এবং $ক \div খ \neq খ \div ক$,

$$\left.\begin{array}{l} তবে\quad ক \div খ = ১ \div (খ \div ক) \\ অর্থাৎ\ \dfrac{ক}{খ} = \dfrac{১}{\dfrac{খ}{ক}} \end{array}\right\} \qquad (৪)$$

কারণ $(ক \div খ) \times খ = ক$,

$$\{(ক \div খ) \times খ\} \div ক = ক \div ক = ১,$$

অর্থাৎ $(ক \div খ) \times খ \div ক = ১$।

$$\therefore \quad ক \div খ = ১ \div (খ \div ক),$$

$$অর্থাৎ\ \frac{ক}{খ} = \frac{১}{\dfrac{খ}{ক}}\ ।$$

৩৬। পূর্ব্বে দেখা গিয়াছে (২৩ ধারা দ্রষ্টব্য)

$$\frac{ক^২ - খ^২}{ক + খ} = \frac{(ক + খ)(ক - খ)}{ক + খ} = ক - খ,$$

$$এবং\ \frac{ক^২ - খ^২}{ক - খ} = \frac{(ক + খ)(ক - খ)}{ক - খ} = ক + খ,$$

$$অর্থাৎ\ \frac{ক^২ - খ^২}{ক \pm খ} = ক \mp খ ।$$

সেইরূপে $\frac{ক^৪ - খ^৪}{ক \pm খ} = \frac{(ক^২)^২ - (খ^২)^২}{ক \pm খ} = \frac{(ক^২ - খ^২)(ক^২ + খ^২)}{ক \pm খ}$

$= (ক \mp খ)(ক^২ + খ^২)$।

কিন্তু $\frac{ক^২ + খ^২}{ক \pm খ} = \frac{ক^২ - খ^২ + ২খ^২}{ক \pm খ} = \frac{ক^২ - খ^২}{ক \pm খ} + \frac{২খ^২}{ক \pm খ}$

$= ক \mp খ + \frac{২খ^২}{ক \pm খ}$।

অর্থাৎ $ক^২ + খ^২$ এই দ্বিপদ $ক \pm খ$ দ্বারা ভাজ্য নহে।

এবং $\frac{ক^৩ + খ^৩}{ক + খ} = ক^২ - কখ + খ^২$,

ও $\frac{ক^৩ - খ^৩}{ক - খ} = ক^২ + কখ + খ^২$।

এক্ষণে দেখা যাউক $ক^ন \pm খ^ন$ এই দ্বিপদ $ক \pm খ$ দ্বারা বিভাজ্য কি না।

এস্থলে ন অখণ্ড ধনরাশি বলিয়া মানিয়া লওয়া গেল।

৩৭। যদি ন অখণ্ড ধনরাশি হয়, তাহা হইলে ভাগপ্রক্রিয়া দ্বারা দেখা যাইতেছে—

(১

$$
\begin{array}{l}
ক - খ)\; ক^ন - খ^ন \;(\; ক^{ন-১} + ক^{ন-২}খ \\
\quad\; \underline{ক^ন - ক^{ন-১}খ} \\
\quad\; ক^{ন-১}খ - খ^ন = (ক^{ন-১} - খ^{ন-১})খ \\
\qquad\qquad\quad \underline{ক^{ন-১}খ - ক^{ন-২}খ^২} \\
\qquad\qquad\quad ক^{ন-২}খ^২ - খ^ন = (ক^{ন-২} - খ^{ন-২})খ^২
\end{array}
$$

এই ভাগক্রিয়া শেষ পর্য্যন্ত চালাইলে দেখা যাইতেছে সর্ব্বশেষ আংশিক ভাজ্য $(ক - খ)খ^{ন-১}$ হইবে, ও তাহা $(ক - খ)$ দ্বারা বিভাজ্য, এবং ভাগফলের শেষ পদ $খ^{ন-১}$ হইবে।

$$\frac{ক^ন - খ^ন}{ক - খ} = ক^{ন-১} + ক^{ন-২}খ + ক^{ন-৩}খ^২ + \ldots + কখ^{ন-২} + খ^{ন-১}।$$

এবং $ক^ন - খ^ন$ এই দ্বিপদ $(ক - খ)$ দ্বারা বিভাজ্য।

$$ক + খ)\, ক^ন - খ^ন \,(ক^{ন-১} - ক^{ন-২}খ + ক^{ন-৩}খ^২$$

$$\underline{ক^ন + ক^{ন-১}খ}$$

$$-ক^{ন-১}খ - খ^ন = -(ক^{ন-১} + খ^{ন-১})খ$$

$$\underline{-ক^{ন-১}খ - ক^{ন-২}খ^২}$$

$$ক^{ন-২}খ^২ - খ^ন = (ক^{ন-২} - খ^{ন-২})খ^২$$

$$\underline{ক^{ন-২}খ^২ + ক^{ন-৩}খ^৩}$$

$$-(ক^{ন-৩} + খ^{ন-৩})খ^৩$$

এই ভাগক্রিয়া শেষ পর্য্যন্ত চালাইলে দেখা যাইতেছে আংশিক ভাজ্য পর পর $-(ক^{ন-১} + খ^{ন-১})খ$, $(ক^{ন-২} - খ^{ন-২})খ^২$, $-(ক^{ন-৩} + খ^{ন-৩})খ^৩$, $(ক^{ন-৪} - খ^{ন-৪})খ^৪$ হইবে।

যদি ন যুগ্ম রাশি হয় তবে, ন − ২, ন − ৪ ইত্যাদি যুগ্ম রাশি, এবং ন − ১, ন − ৩ ইত্যাদি অযুগ্ম রাশি হইবে, এবং শেষে $-(ক + খ)খ^{ন-১}$ এই আংশিক ভাজ্যে উপনীত হওয়া যাইবে, ও তাহা $(ক + খ)$ দ্বারা বিভাজ্য।

কিন্তু যদি ন অযুগ্ম রাশি হয় তবে, ন − ১, ন − ৩ ইত্যাদি যুগ্ম ও ন − ২, ন − ৪ ইত্যাদি অযুগ্ম রাশি হইবে, এবং শেষে $(ক - খ)খ^{ন-১}$ এই আংশিক ভাজ্যে উপনীত হইতে হইবে ও তাহা $(ক + খ)$ দ্বারা বিভাজ্য নহে।

যদি ন যুগ্ম হয় তাহা হইলে

$$\frac{\text{ক}^{\text{ন}}-\text{খ}^{\text{ন}}}{\text{ক}+\text{খ}}=\text{ক}^{\text{ন}-১}-\text{ক}^{\text{ন}-২}\text{খ}+\text{ক}^{\text{ন}-৩}\text{খ}^{২}-\ \ldots\ -\text{কখ}^{\text{ন}-২}-\text{খ}^{\text{ন}-১}$$

এবং $\text{ক}^{\text{ন}}-\text{খ}^{\text{ন}}$ এই দ্বিপদ (ক + খ) দ্বারা বিভাজ্য।

যদি ন অযুগ্ম হয়, তাহা হইলে

$\text{ক}^{\text{ন}}-\text{খ}^{\text{ন}}$ এই দ্বিপদ (ক + খ) দ্বারা বিভাজ্য নহে।

(ঙ)

$$\text{ক}+\text{খ})\ \text{ক}^{\text{ন}}-\text{খ}^{\text{ন}}\ (\text{ক}^{\text{ন}-১}-\text{ক}^{\text{ন}-২}\text{খ}+\text{ক}^{\text{ন}-৩}\text{খ}^{২}$$

$$\underline{\text{ক}^{\text{ন}}+\text{ক}^{\text{ন}-১}\text{খ}}$$

$$-\text{ক}^{\text{ন}-১}\text{খ}+\text{খ}^{\text{ন}}=-(\text{ক}^{\text{ন}-২}-\text{খ}^{\text{ন}-১})\text{খ}$$

$$\underline{-\text{ক}^{\text{ন}-১}\text{খ}-\text{ক}^{\text{ন}-২}\text{খ}^{২}}$$

$$(\text{ক}^{\text{ন}-২}+\text{খ}^{\text{ন}-২})\text{খ}^{২}$$

$$\underline{\text{ক}^{\text{ন}-২}\text{খ}^{২}+\text{ক}^{\text{ন}-৩}\text{খ}^{৩}}$$

$$-(\text{ক}^{\text{ন}-৩}-\text{খ}^{\text{ন}-৩})\text{খ}^{৩}$$

এই ভাগক্রিয়া শেষ পর্য্যন্ত চালাইলে দেখা যাইতেছে আংশিক ভাজ্য সব ক্রমে $-(\text{ক}^{\text{ন}-১}-\text{খ}^{\text{ন}-১})\text{খ},\ (\text{ক}^{\text{ন}-২}-\text{খ}^{\text{ন}-২})\text{খ}^{২}$

$-(\text{ক}^{\text{ন}-৩}-\text{খ}^{\text{ন}-৩})\text{খ}^{৩}$ হইবে।

যদি ন অযুগ্ম হয়, তবে ন − ২, ন − ৪ ইত্যাদি অযুগ্ম এবং ন − ১, ন − ৩ ইত্যাদি যুগ্ম রাশি হইবে, এবং শেষে (ক + খ) $\text{খ}^{\text{ন}-১}$ এই আংশিক ভাজ্যে উপনীত হওয়া যাইবে ও তাহা (ক + খ) দ্বারা বিভাজ্য।

কিন্তু যদি ন যুগ্মরাশি হয় তাহা হইলে ন−২, ন−৪ ইত্যাদি যুগ্ম হইবে, ও ন−১, ন−৩ ইত্যাদি অযুগ্ম হইবে, এবং শেষে $-(ক-খ)খ^{ন-১}$ এই আংশিক ভাজ্যে উপনীত হইতে হইবে ও তাহা (ক+খ) দ্বারা বিভাজ্য নহে।

∴ যদি ন অযুগ্ম হয় তাহা হইলে

$$\frac{ক^ন+খ^ন}{ক+খ}=ক^{ন-১}-ক^{ন-২}খ+ক^{ন-৩}খ^২-\quad-কখ^{ন-২}+খ^{ন-১},$$

যদি ন যুগ্ম হয় তাহা হইলে

$ক^ন+খ^ন$ এই দ্বিপদ (ক+খ) দ্বারা বিভাজ্য নহে।

(৪)

$$
\begin{array}{l}
ক-খ\big)\,ক^ন+খ^ন\big(ক^{ন-১}+ক^{ন-২}খ+\\
\quad\underline{ক^ন-ক^{ন-১}খ}\\
\qquad ক^{ন-১}খ+খ^ন=\left(ক^{ন-১}+খ^{ন+১}\right)খ\\
\qquad\qquad\underline{ক^{ন-১}খ-ক^{ন-২}খ^২}\\
\qquad\qquad\quad\left(ক^{ন-২}+খ^{ন-২}\right)খ^২
\end{array}
$$

এই ভাগক্রিয়া শেষ পর্য্যন্ত চালাইলে দেখা যাইতেছে ন যুগ্মই হউক আর অযুগ্মই হউক, শেষে $(ক+খ)খ^{ন-১}$ এই আংশিক ভাজ্যে উপনীত হইব, এবং তাহা (ক−খ) দ্বারা বিভাজ্য নহে।

উপরের চারিটি কথা মনে রাখা আবশ্যক।

৩৮। গুণন দ্বারা দেখা যাইতেছে

$$(স+ক)\,(স+খ)\qquad=স^২+(ক+খ)স+কখ,$$

$$(স+ক)(স+খ)(স+গ)=স^৩+(ক+খ+গ)স^২+(কখ+কগ+খগ)স+কখগ।$$

$$(ক+খ+গ+ঘ)^{২} = ক^{২}+খ^{২}+গ^{২}+ঘ^{২}+২ক(খ+গ+ঘ)$$
$$+২খ(গ+ঘ)+২গঘ।$$

$$(স^{২}+কস+ক^{২})\,(স^{২}-কস+ক^{২})$$
$$=\{(স^{২}+ক^{২})+কস\}\,\{(স^{২}+ক^{২})-কস\}$$
$$=(স^{২}+ক^{২})^{২}-ক^{২}স^{২}$$
$$=স^{৪}+২ক^{২}স^{২}+ক^{৪}-ক^{২}স^{২}$$
$$=স^{৪}+ক^{২}স^{২}+ক^{৪}।$$

৩৯। যদি কোন তিনটি অক্ষর, ক, খ, গ, চক্রাকারে অর্থাৎ একটি বৃত্তের উপর ক্রমান্বয়ে লেখা যায়, তাহাদের সেই ক্রমান্বয়ে যে কোন বিন্যাসকে **ক্রমবিন্যাস** বা **চক্রবাল** বলা যায়।

যথা, $ক+খ+গ$,

$ক+খ, খ+গ, গ+ক$,

$ক-খ, খ-গ, গ-ক$,

$কখ, খগ, গক$,

$ক^{২}(খ+গ)+খ^{২}(গ+ক)+গ^{২}(ক+খ)$,

ক, খ, গ'র চক্রবিন্যাস।

কিন্তু, $ক+খ, ক+গ, খ+গ$,

অথবা কখ, কগ, খগ

ক, খ, গ'র চক্রবিন্যাস নহে।

চক্রবিন্যাসে সম্বদ্ধ অক্ষরত্রয়ের রাশিমালার কতকগুলি সাঙ্কেতিক বাক্য মনে রাখা আবশ্যক।

তাহা নিম্নের ধারায় প্রদর্শিত হইতেছে।

৪০। (১) $(ক+খ+গ)\,(কখ+খগ+গক)-কখগ$
$$=(ক+খ)\,(খ+গ)\,(গ+ক)।$$

$(ক+খ+গ)(কখ+খগ+গক)-কখগ$

$=(ক+খ)(কখ+খগ+গক)+গ(কখ+খগ+গক-কখ)$

$=(ক+খ)\{ক(খ+গ)+খগ\}+গ(খগ+গক)$

$=(ক+খ)\{ক(খ+গ)+খগ\}+গ^2(ক+খ)$

$=(ক+খ)\{ক(খ+গ)+খগ+গ^2\}$

$=(ক+খ)\{ক(খ+গ)+গ(খ+গ)\}$

$=(ক+খ)(খ+গ)(গ+ক)$

২) $ক^2(খ+গ)+খ^2(গ+ক)+গ^2(ক+খ)+২কখগ$

$-(ক+খ)(খ+গ)(গ+ক)$

$ক^2(খ+গ)+খ^2(গ+ক)+গ^2(ক+খ)+২কখগ$

$=ক^2(খ+গ)+ক(খ^2+গ^2+২খগ)+খগ(খ+গ)$

$=ক^2(খ+গ)+ক(খ+গ)^2+খগ(খ+গ)$

$=(খ+গ)\{ক^2+কখ+কগ+খগ\}$

$=(খ+গ)\{ক(ক+খ)+গ(ক+খ)\}$

$=(ক+খ)(খ+গ)(গ+ক)$।

৩) $ক^2(খ+গ)+খ^2(গ+ক)+গ^2(ক+খ)+৩কখগ$

$=(ক+খ+গ)(কখ+খগ+গক)$

$(ক+খ+গ)(কখ+খগ+গক)$

$=ক(কখ+গক)+কখগ$

$+খ(কখ+খগ)+কখগ$

$+গ(খগ+গক)+কখগ$

$=ক^2(খ+গ)+খ^2(গ+ক)+গ^2(ক+খ)+৩কখগ$।

৪) $(ক+খ+গ)^3=ক^3+খ^3+গ^3+৩(ক+খ)(খ+গ)(গ+ক)$।

$(ক+খ+গ)^3=\{(ক+খ)+গ\}^3$

$=(ক+খ)^3+গ^3+৩গ(ক+খ)(ক+খ+গ)$

$=ক^3+খ^3+গ^3+৩কখ(ক+খ)+৩গ(ক+খ)(ক+খ+গ)$

$=ক^3+খ^3+গ^3+৩(ক+খ)\{ক(খ+গ)+গ(খ+গ)\}$

$=ক^3+খ^3+গ^3+৩(ক+খ)(খ+গ)(গ+ক)$।

(৫) $ক^2(খ-গ)+খ^2(গ-ক)+গ^2(ক-খ)$
$= -(ক-খ)(খ-গ)(গ-ক)$।

$$ক^2(খ-গ)+খ^2(গ-ক)+গ^2(ক-খ)$$
$$= ক^2(খ-গ)-কখ^2+কগ^2+খ^2গ-খগ^2$$
$$= ক^2(খ-গ)-ক(খ^2-গ^2)+খগ(খ-গ)$$
$$= (খ-গ)\{ক^2-ক(খ+গ)+খগ\}$$
$$= (খ-গ)\{ক(ক-খ)-গ(ক-খ)\}$$
$$= -(ক-খ)(খ-গ)(গ-ক)।$$

৪১। উপরের ২৩, ৩৭ ৩৮, ও ৪০ ধারায় প্রদর্শিত সাঙ্কেতিক বাক্য দ্বারা অনেক স্থলে দ্বিপদ, ত্রিপদ ও বহুপদ রাশির উৎপাদক বিশ্লেষ হইতে পারে।

বীজগণিতে সাধারণ গুণনীয়ক ও গুণিতক নির্ণয়ার্থে রাশিদিগের উৎপাদক বিশ্লেষ আবশ্যক। অতএব ত্রিপদ রাশির দ্বিপদ উৎপাদক নির্ণয়ের কএকটি বিশেষ নিয়ম এই স্থানে প্রদর্শিত হইতেছে।

৪২। গুণন দ্বারা দেখা যায়,

$$(স+ক)(স+খ)=স^2+(ক+খ)স+কখ \quad (১)$$
$$(স-ক)(স-খ)=স^2-(ক+খ)স+কখ \quad (২)$$
$$(স+ক)(স-খ)=স^2+(ক-খ)স-কখ \quad (৩)$$
$$(স-ক)(স+খ)=স^2-(ক-খ)স-কখ \quad \ldots(৪)$$

অতএব এই চারিটি সাম্যের যে কোনটির দক্ষিণের আকারের ত্রিপদের দ্বিপদ উৎপাদকদ্বয় নির্ণয় করিতে হইলে দেখিতে হইবে ত্রিপদের শেষ পদ + চিহ্নযুক্ত হইলে উৎপাদকদ্বয়ের দ্বিতীয় পদ উভয়েই ধনরাশি অথবা উভয়েই ঋণরাশি হইবে, ও তাহাদের যোগফল ত্রিপদের দ্বিতীয় পদের প্রকৃতি হইবে ; এবং ত্রিপদের শেষ পদ − চিহ্নযুক্ত হইলে উৎপাদকদ্বয়ের একটির শেষ পদ ধনরাশি অপরটির শেষ পদ ঋণরাশি হইবে, এবং তাহাদের বিয়োগফল ত্রিপদের দ্বিতীয় পদের প্রকৃতি হইবে।

যথা, $স^২+৮স+১৫=(স+৫)(স+৩)$,

$স^২-৯স+১৪=(স-৭)(স-২)$,

$স^২+৫স-১৪=(স+৭)(স-২)$,

$স^২-৫স-১৪=(স-৭)(স+২)$।

৪৩। অনুমান দ্বারা এইরূপে উৎপাদক নির্ণয় সর্ব্বত্র সুবিধাজনক না হইতে পারে। এই জন্য নিম্নলিখিত নিয়মটি কখন কখন অবলম্বন করা যাইতে পারে।

মনে কর ত্রিপদটি এই, $স^২+পস+ফ$,

তাহা হইলে $স^২+পস+ফ=স^২+পস+\left(\frac{প}{২}\right)^২+ফ-\left(\frac{প}{২}\right)^২$

$$=\left(স+\frac{প}{২}\right)^২-\left\{\left(\frac{প}{২}\right)^২-ফ\right\}=\left(স+\frac{প}{২}\right)^২-\left\{\sqrt{\left(\frac{প}{২}\right)^২-ফ}\right\}^২$$

$$=\left\{স+\frac{প}{২}+\sqrt{\left(\frac{প}{২}\right)^২-ফ}\right\}$$

$$\times\left\{স+\frac{প}{২}-\sqrt{\left(\frac{প}{২}\right)^২-ফ}\right\}।$$

কিন্তু $\left(\frac{প}{২}\right)^২-ফ$ সম্পূর্ণ বর্গরাশি না হইলে তাহার বর্গমূল অর্থাৎ $\sqrt{\left(\frac{প}{২}\right)^২-ফ}$ সহজে নির্ণয় করা যায় না, এবং উৎপাদক সহজ আকারের হয় না।

উপরের ৪২ ধারার প্রথম উদাহরণটি লইলে দেখা যায়, $প=৮$, $ফ=১৫$,

$\therefore\ \left(\frac{প}{২}\right)^২=১৬, \left(\frac{প}{২}\right)^২-ফ=১$।

$\therefore\ স^২+৮স+১৫=(স+৪+১)(স+৪-১)$

$=(স+৫)(স+৩)$।

৪৪। যদি ত্রিপদটি $চস^{২} + ছস + জ$ এই আকারের হয়, তাহা হইলে যখন $চস^{২} + ছস + জ = চ\left(স^{২} + \frac{ছ}{চ}স + \frac{জ}{চ}\right)$, তখন সেই ত্রিপদকে শেষোক্ত আকারে আনিয়া, ৪২, ৪৩ ধারার নিয়মানুসারে $স^{২} + \frac{ছ}{চ}স + \frac{জ}{চ}$ ইহার উৎপাদকদ্বয় নির্ণয় করিয়া, তাহার কোন একটিকে চ দ্বারা গুণ করিলেই ইষ্ট উৎপাদকদ্বয় পাওয়া যাইবে।

যথা, $৩স^{২} + ১৪স - ৫ = ৩(স^{২} + \frac{১৪}{৩}স - \frac{৫}{৩})$
$= ৩(স + ৫)(স - \frac{১}{৩}) = (স + ৫)(৩স - ১)$।

অথবা এরূপ স্থলে আর এক প্রণালী অবলম্বন করা যাইতে পারে।

মনে কর $চস^{২} + ছস + জ = (টস + ঠ)(ডস + ঢ)$।

$চস^{২} + ছস + জ = (টস + ঠ)(ডস + ঢ)$
$= টডস^{২} + (টঢ + ঠড)স + ঠঢ$,

এবং $চ = টড$, $ছ = টঢ + ঠড$, $জ = ঠঢ$।

আর ট, ঠ, ড, ঢ এই শেষের তিনটি সমীকরণ হইতে **অনুমান** করিয়া পাওয়া যাইতে পারে।

উদাহরণ (১), $১৪স^{২} + ২৯স - ১৫ = (৭স - ৩)(২স + ৫)$,

উদাহরণ (২), $১৪স^{২} - ২৯স - ১৫ = (৭স + ৩)(২স - ৫)$।

উদাহরণ (৩), $৯স^{২} - ৪৮বস + ৬৪ব^{২} = (৩স - ৮ব)(৩স - ৮ব)$
$= (৩স - ৮ব)^{২}$।

৪৫। উপরে ৩৭ হইতে ৪৪ ধারায় যে সকল **সাঙ্কেতিক বাক্যের** উল্লেখ হইয়াছে, পাঠকের সুবিধার নিমিত্ত নিম্নে তাহা একত্র লিপিবদ্ধ করা গেল। সেগুলি মনে রাখা আবশ্যক।—

$$\frac{ক^{ন} - খ^{ন}}{খ - ক} = ক^{ন-১}ক^{ন-২}খ + ক^{ন-৩}খ^{২} + \ldots + কখ + খ^{ন-১} \qquad (১)$$

$$\frac{ক^{ন} - খ^{ন}}{ক + খ} = ক^{ন-১} - ক^{ন-২}খ + ক^{ন-৩}খ^{২} - \ldots + কখ^{ন-২} - খ^{ন-১} \qquad (২)$$

(যদি ন যুগ্ম হয়)

$$\frac{ক^{ন}+খ^{ন}}{ক+খ}=ক^{ন-১}-ক^{ন-২}খ+ক^{ন-৩}খ^{২}-\quad কখ^{ন-২}+খ^{ন-১}\ (৩,$$

যদি ন অযুগ্ম হয়)

$$(স+ক)(স+খ)=স^{২}+(ক+খ)স+কখ \qquad (৪)$$

$$স+ক)(স+খ)(স+গ)=স^{৩}+(ক+খ+গ)স+(কখ+কগ+খগ)স$$
$$+কখগ \qquad . \ (৫)$$

$$(ক+খ+গ+ঘ)^{২}=ক^{২}+খ^{২}+গ^{২}+ঘ^{২}+২ক(খ+গ+ঘ)$$
$$+২খ(গ+ঘ)+২গঘ। \qquad (৬)$$

$$স^{৪}+ক^{২}স^{২}+ক^{৪}=(স^{২}+কস+ক^{২})(স^{২}-কস+ক^{২}। \qquad (৭)$$

$$(ক+খ)(খ+গ)(গ+ঘ)=(ক+খ+গ)(কখ+খগ+গক)-কখগ\ (৮)$$

$$(ক+খ)(খ+গ)(গ+ক)=ক^{২}(খ+গ)+খ^{২}(গ+ক)+গ^{২}(ক+খ)$$
$$+২কখগ \qquad (৯)$$

$$(ক+খ+গ)(কখ+খগ+গক)=ক^{২}(খ+গ)+খ^{২}(গ+ক)+গ^{২}(ক+খ)$$
$$+৩কখগ. \qquad (১০)$$

$$(ক+খ+গ)^{৩}=ক^{৩}+খ^{৩}+গ^{৩}+৩(ক+খ)(খ+গ)$$
$$(গ+ক)\ ..\ . \qquad (১১)$$

$$-(ক-খ)(খ-গ)(গ-ক)=ক^{২}(খ-গ)+খ^{২}(গ-ক)+গ^{২}(ক-খ)$$
$$\ldots\ \ldots. \qquad (১২)$$

$$(স+ক)(স+খ)=স^{২}+(ক+খ)স+কখ\ .. \qquad ..\ (১৩)$$

$$(স-ক)(স-খ)=স^{২}-(ক+খ)স+কখ \qquad . \quad (১৪)$$

$$(স+ক)(স-খ)=স^{২}+(ক-খ)স-কখ. \quad \ldots\ .. \quad (১৫)$$

$$(স-ক)(স+খ)=স^{২}-(ক-খ)\ -কখ\ ..\ . \qquad (১৬)$$

$$স^{২}+পস+ফ=\left\{স+\frac{প}{২}+\sqrt{\frac{প^{২}}{৪}-ফ}\right\}$$
$$\times\left\{স+\frac{প}{২}-\sqrt{\frac{প^{২}}{৪}-ফ}\right\} \quad . \qquad \ldots(১৭)$$

$$চস^{২}+ছন+জ=(টস+ঠ)(ডস+ঢ)$$
$$=টডস^{২}+(টঢ+ঠড)স+ঠড\ldots\ldots \qquad (১৮)$$

যদি $টড=চ$, $(টঢ+ঠড)=ছ$, $ঠঢ=জ$।

২। উদাহরণমালা।

১। (১) $ক^২ + খ^২ + গ^২ + খগ + গক - কখ$ ইহাকে $ক + খ + গ$ দিব গুণ কব।

(২) $১ - স + স^২ - স^৩$ ইহাকে $১ + স + স^২ + স^৩$ দিয়া গুণ কর

(৩) $ক^২ + ২খ^২ + ৯গ^২ - ৩কখ + ৬কগ - ৯খগ$ ইহাকে
$ক + ২খ - ৩গ$ দিয়া গুণ কব।

২। (১) $৬ক^৩ - ১৭ক^২খ + ৭কখ^২ - ৫খ^৩$ ইহাকে
$২ক - ৫খ$ দিয়া ভাগ কব।

(২) $স - স^৪ষ + স^৩ষ^২ - স^২ষ^৩ + সষ^৪ - ষ^৫$ ইহাকে
$স^৩ - ষ^৩$ দিয়া ভাগ কব।

(৩) $স^৪ + স^৩ - ১৪স^২ - ৩৫স + ৫৭$ ইহাকে
$স^২ + ২স - ৩$ দিয়া ভাগ কব।

৩। (১) $৩ক - [ক + খ - ২\{ক + খ + গ - (ক - খ + গ - স)\} + ক]$
ইহাব বন্ধনী মোচন কব।

(২) $২[ক + খ + গ - ৩\{খ + গ - ৪(গ - ক)\}]$
ইহাব বন্ধনী মোচন কব।

(৩) $কস^২ + খস + গ - \{পস^২ - (ফস - ব)\} + \{নস^২ - (মস - ন)\}$
ইহাব বন্ধনী মোচন করিয়া স এব শক্তিসূচকক্রমে পুনরায় বন্ধনীপ্রয়োগ কব।

(৪) $কস^২ + ২কস^৩ - খ^২স^৪ - ২খস^৩ - খস^২ + ক^২স^৪$
ইহাকে স এব শক্তিসূচক অনুসাবে সাজাও।

৪। নিম্নলিখিত চাবিটি ভাগফল নির্ণয় কব—

(১) $(ক^৬ + খ^৬) - (ক^২ + খ^২)$।

(২) $(ক^৫ - খ^৫) - (ক - খ)$।

(৩) $(ক^৪ - খ^৪) - (ক - খ)$।

(৪) $(ক^৪ - খ^৪) \div (ক + খ)$।

৫। নিম্নলিখিত চারিটি সাম্য সপ্রমাণ কর—

(১) $ক^{২}(খ+গ)+খ^{২}(গ+ক)+গ^{২}(ক+খ)$
$=ক(খ^{২}+গ^{২})+খ(গ^{২}+ক^{২})+গ(ক^{২}+খ^{২})$।

(২) $(ক+খ)^{২}+(খ+গ)^{২}+(গ+ক)^{২}=(ক+খ+গ)^{২}+ক^{২}+খ^{২}+গ^{২}$

(৩) $(ক-খ)^{২}+(খ-গ)^{২}+(গ-ক)^{২}$
$=২(ক-খ)(ক-গ)+২(খ-ক)(খ-গ)+২(গ-ক)(গ-খ)$।

(৪) $৮(ক+খ+গ)^{৩}-(ক+খ)^{৩}-(খ+গ)^{৩}-(গ+ক)^{৩}$
$=৩(২ক+খ+গ)(ক+২খ+গ)(ক+খ+২গ)$।

৬। নিম্নলিখিত সাতটি রাশিমালার উৎপাদক বিশ্লেষ কর—

(১) $স^{২}+১৪স+৪৯$। (২) $১২স^{২}+স-২০$।

(৩) $৮স^{২}+৬স-২৭$। (৪) $স^{২}-২স-১৫$।

(৫) $৩স^{২}+১৯স+২০$। (৬) $ক^{৪}+১৩ক^{২}+৪৯$।

(৭) $ক^{৩}+৬ক(ক+২)+১৬$।

তৃতীয় অধ্যায়।

সাধারণ গুণনীয়ক ও গুণিতক।

৪৬। সাধারণ গুণনীয়ক ও গুণিতক সম্বন্ধে পাটীগণিতের প্রথম অধ্যায়ের ষষ্ঠ পরিচ্ছেদে (৫৪ হইতে ৬৩ ধারা দ্রষ্টব্য) যাহা বলা হইয়াছে, তাহার পুনরুক্তি এখানে নিষ্প্রয়োজন। গুণনীয়ক ও গুণিতক সম্বন্ধে বীজগণিতে তদতিরিক্ত যাহা বলা আবশ্যক তাহাই এখানে বলা যাইবে।

৪৭। দুই বা ততোধিক রাশির সাধারণ অক্ষরের উচ্চতম শক্তিযুক্ত সাধারণ ভাজককে তাহাদের **গরিষ্ঠ** বা **উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক** বলে।

বীজগণিতে গরিষ্ঠ অপেক্ষা উচ্চতম শব্দই অধিকতর সঙ্গত, কারণ অনেক স্থলে দুই রাশির অক্ষর হিসাবে উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক তাহাদের সংখ্যা হিসাবে গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক অপেক্ষা ছোট হইতে পারে।

যথা, $স^{৩}+৩স^{২}+৩স+১$,

এবং $স^{৩}+১$,

এই দুইটি রাশি লইলে, দেখা যাইতেছে,

$$স^{৩}+৩স^{২}+৩স+১=(স+১)(স+১)(স+১),$$

এবং $স^{৩}+১ \qquad =(স+১)(স^{২}-স+১)$।

সুতরাং $স+১$ তাহাদের উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক।

এবং যদি $স=৫$ হয়, তবে $স+১=৬$।

কিন্তু তাহা হইলে $(স+১)^{৩}=৬^{৩}=২১৬=১২\times১৮$

এবং $স^{৩}+১=৫^{৩}+১=১২৬=৭\times১৮$,

সুতরাং উদাহরণের রাশিদ্বয়ের গরিষ্ঠ সাধারণ গুণনীয়ক$=১৮$, যাহা ৬ অপেক্ষা অনেক বড়।

ইহার কারণ এই যে উদাহরণের রাশিদ্বয়ের অক্ষর হিসাবে স+১ অপেক্ষা উচ্চতর কোন ভাজক নাই, কেন না উভয় রাশিকে স+১ দিয়া ভাগ করিলে ভাগফল

$(স+১)^২$ এবং $স^২-স+১$ হয়,

এবং ইহাদের অক্ষর হিসাবে কোন সাধারণ ভাজক নাই।

কিন্তু স=৫ হইলে ভাগফলদ্বয়ের মূল্য ৩৬ এবং ২১ হয়,

আর এই শেষোক্ত সংখ্যাদ্বয়ের একটি সাধারণ ভাজক ৩ আছে।

৪৮। রাশিগুলি একপদ হইলে তাহাদের সাধারণ গুণনীয়ক ও উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক সহজেই জানা যায়।

যথা, ৬ $ক^৩খ^২গ$ এবং ৮ $ক^৪খ^৩ঘ$

ইহাদের সাধারণ গুণনীয়ক কখ, $ক^২খ^২$, ২ $ক^২খ$ প্রভৃতি এবং উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক ২ $ক^৩খ^২$।

৪৯। রাশিগুলি যদি দ্বিপদ বা বহুপদ হয়, তাহা হইলে তাহাদের মৌলিক উৎপাদক বিশ্লেষ করিয়া তন্মধ্যে যতগুলি সাধারণ উৎপাদক থাকে তাহাদের ক্রমান্বয়ে গুণ করিলে সেই গুণফল তাহাদের উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক হইবে, ইহা স্পষ্ট বুঝা যায়।

(১) উদাহরণ। $স^৩+৩স^২+৩স+১$,

এবং $(ক+১)স^২+২(ক+১)স+ক+১$,

এই দুই রাশির উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয় কর।

$স^৩+৩স^২+৩স+১=(স+১)(স+১)(স+১)$,

$(ক+১)স^২\times২(ক+১)স+ক+১=(ক+১)(স+১)(স+১)$।

$\therefore$ এই দুই রাশির সাধারণ মৌলিক উৎপাদক (স+১) ও (স+১)।

$\therefore$ তাহাদের উ, সা, গ,$=(স+১)(স+১)=স^২+২স+১$।

(২) উদাহরণ। $স^২+৯স+২০$,

এবং $স^২+৮স+১৫$,

এই দুই রাশির উ, সা, গ, নির্ণয় কর।

$স^২+৯স+২০=(স+৪)(স+৫)$,

$স^২+৮স+১৫=(স+৩)(স+৫)$।

. এই দুই রাশির সাধারণ উৎপাদক কেবল স+৫,

∴ তাহাদের উ, সা, গ,=স+৫।

কিন্তু অনেকপদ রাশির উৎপাদক বিশ্লেষ সর্ব্বত্র সহজ নহে। অতএব দুই বা ততোধিক অনেকপদ রাশির উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয়ের জন্য নিয়ম আবশ্যক, এবং তাহা নিম্নে দেওয়া যাইতেছে। সেই নিয়ম সপ্রমাণ করণার্থে নিম্নের কথাটি অগ্রে সপ্রমাণ করা আবশ্যক।

৫০। যদি ভ এই রাশি ক ও খ এই দুইটি রাশির সাধারণ ভাজক হয়, তবে (পক±ফখ) এই রাশির একটি ভাজক ভ হইবে।

এ কথার প্রমাণ অতি সহজ।

যখন ক ও খ উভয়েরই ভাজক ভ,

তখন অবশ্যই ক=মভ, পক=পমভ,

খ=যভ, ফখ=ফযভ,

অতএব পক±ফখ=পমভ±ফযভ=(পম±ফয) ভ।

৫১। দুইটি অনেকপদ রাশির উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয়ের নিয়ম।

রাশিদ্বয়কে তাহাদের প্রধান অক্ষরের শক্তিক্রমে সাজাইয়া অনুচ্চশক্তি-বিশিষ্ট রাশিদ্বারা অপর রাশিকে ভাগ কর। যদি ভাগশেষ না থাকে তবে সেই ভাজকই ইষ্ট উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক।

যদি ভাগশেষ থাকে তবে তদ্দ্বারা প্রথম ভাজককে ভাগ কর। যদি ভাগশেষ না থাকে তবে এই বারের ভাজকই ইষ্ট উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক।

যদি ভাগশেষ থাকে তবে তদ্দ্বারা পূর্ব্ববর্ত্তী ভাজককে ভাগ কর। যদি ভাগশেষ না থাকে তবে এইবারের ভাজকই ইষ্ট উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক।

যদি ভাগশেষ থাকে, পূর্ব্ববৎ প্রক্রিয়া চালাইবে, যতক্ষণ না বিনা ভাগশেষে ভাগকার্য্য সমাধা হয়।

শেষবারের ভাজকই ইষ্ট উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক জানিবে।

এই নিয়মের হেতু নিম্নে প্রদর্শিত হইতেছে।

মনে কর ক ও খ এর উ, সা, গ, নির্ণয় করিতে হইবে। এবং মনে কর উক্ত নিয়মমত প্রক্রিয়া নিম্নলিখিতরূপ হইল, যথা—

খ) ক (ম
মখ
গ) খ (য
যগ
ঘ) গ (র
রঘ
০

তাহা হইলে

ক = মখ + গ, এবং গ = ক − মখ,

খ = যগ + ঘ, এবং ঘ = খ − যগ,

গ = রঘ + ০।

অর্থাৎ ঘ এই রাশি গ এর ভাজক এবং ঘ এর ভাজক, সুতরাং ৫০ ধারা অনুসারে

ঘ এই রাশি (যগ + ঘ) এর অর্থাৎ খ এর ভাজক।

এবং ঘ এই রাশি গ এরও ভাজক।

সুতরাং ঘ এই রাশি (মখ + গ) এর অর্থাৎ ক এরও ভাজক।

∴ ঘ এই রাশি ক ও খ এর সাধারণ গুণনীয়ক।

আবার ক ও খ এর প্রত্যেক সাধারণ ভাজক
(ক − মখ) এর অর্থাৎ গ এর ভাজক,

সুতরাং (খ − যগ) এর অর্থাৎ ঘ এর ভাজক।

কিন্তু ঘ অপেক্ষা ঘ এর উচ্চতম ভাজক নাই।

সুতরাং ঘ অপেক্ষা ক ও খ এর উচ্চতম সাধারণ ভাজক নাই।

এবং দেখা গিয়াছে ঘ এই রাশি ক ও খ এর একটি সাধারণ ভাজক। অতএব ঘ এই রাশিই ক ও খ এর উচ্চতম সাধাবণ গুণনীয়ক।

(১) **উদাহরণ।** $স^২+৭স+১২$ এবং $স^৩+৮স^২+২০স+১৬$ ইহাদেব উ, সা, গ, নির্ণয় কব।

$স^২+৭স+১২)\ স^৩+৮স^২+২০স+১৬\ (স+১$
$স^৩+৭স^২+১২স$
$স^২+৮স+১৬$
$স^২+৭স+১২$
$স+৪)\ স^২+৭স+১২\ (স+৩$
$স^২+৪স$
$৩স+১২$
$৩স+১২$

$\therefore$ ইষ্ট উ, সা, গ, $=স+৪$।

(২) **উদাহবণ।** $স^২+৭স+১২$ এবং $৩স^৩+২৪স^২+৬০স+৪৮$ ইহাদেব উ, সা, গ, নির্ণয় কব।

$স^২+৭স+১২)\ ৩স^৩+২৪স^২+৬০স+৪৮\ (৩স+৩$
$৩স^৩+২১স^২+৩৬স$
$৩স^২+২৪স+৪৮$
$৩স^২+২১স+৩৬$
$৩স+১২)\ স^২+৭স+১২\ (\frac{১}{৩}স+১$
$স^২+৪স$
$৩স+১২$
$৩স+১২$

অতএব এই প্রক্রিয়ার ফল এই হইতেছে যে $৩স+১২$ ইষ্ট উ, সা, গ।

উদাহরণের প্রথম রাশি (৩স+১২) দিয়া ভাগ করিলে দেখা যায় ভাগফল ২/৩ স+১ হইতেছে।

অর্থাৎ এই ভাগফলের প্রথম পদের সাংখ্যপ্রকৃতি ভগ্নাংশ হইতেছে। তবে মূল অক্ষর স কোন ভগ্নাংশের হবে নাই।

এস্থলে দেখা যাইতেছে উদাহরণের দ্বিতীয় রাশির একটি উৎপাদক ৩, কিন্তু উদাহরণের প্রথম রাশি ৩ দিয়া ভাজ্য নহে। এরূপ স্থলে ভাজক (৩ স+১২) ইহার পরিবর্তে (স+৪) এই রাশিকে ভাজক বলিয়া লওয়াই উচিত। মূলরাশিদ্বয়ের মধ্যে যদি কোন একটির এরূপ কোন সংখ্যা ভাজক থাকে যাহা অপরটির ভাজক নহে, তাহা হইলে প্রথমোক্ত রাশিটিকে সেই ভাজক দিয়া অগ্রে ভাগ করিয়া উক্ত নিয়মের প্রক্রিয়া আরম্ভ করা উচিত। তাহা হইলে প্রক্রিয়া অনেকটা সহজ হইবে।

এই উদাহরণে দ্বিতীয় রাশিকে ৩ দিয়া ভাগ করিয়া পরে প্রক্রিয়া আরম্ভ করিলে সেই প্রক্রিয়া প্রথম উদাহরণের প্রক্রিয়ার ন্যায় হইবে।

(৩) উদাহরণ। ২স² + ১৪স + ২৪ এবং
৩স³ + ২৪স² + ৬০স + ৪৮ ইহাদের উ, সা, গ, নির্ণয় কর।

২স² + ১৪স + ২৪)৩স³ + ২৪স² + ৬০স + ৪৮ (৩/২স + ৩/২
৩স³ + ২১স² + ৩৬স
৩স² + ২৪স + ৪৮
৩স² + ২১স + ৩৬
৩স + ১২

কিন্তু যখন দেখা যাইতেছে প্রথম রাশি ২ দিয়া
এবং দ্বিতীয় রাশি ৩ দিয়া

ভাজ্য এবং ২ ও ৩এর কোন সাধারণ গুণনীয়ক নাই, তখন প্রথম রাশিকে ২ দিয়া এবং দ্বিতীয় রাশিকে ৩ দিয়া অগ্রে ভাগ করিয়া পরে প্রক্রিয়া আরম্ভ করিলে কার্য্য সহজ হইবে। এবং তাহা হইলে রাশিদ্বয় বিভাগান্তে স² + ৭স + ১২ এবং স³ + ৮স² + ২০স + ১৬ হইবে।

সুতরাং প্রক্রিয়া ঠিক (১) উদাহরণের প্রক্রিয়ার ন্যায় হইবে।

৫২। তিন বা ততোধিক রাশির উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়ক নির্ণয়ের নিয়ম।

অগ্রে প্রথম ও দ্বিতীয় বাশির উ, সা, গ, নির্ণয় কব। তাহার পব সেই উচ্চতম সাধাবণ গুণনীয়কেব ও তৃতীয় বাশির উ, সা, গ, নির্ণয় কর। তদনন্তর এই শেষোক্ত উচ্চতম সাধারণ গুণনীয়কেব ও চতুর্থ বাশিব উ, সা, গ, নির্ণয় কর। এইরূপে শেষ বাশি পর্য্যন্ত চল। তাহা হইলে সর্ব্বশেষেব নির্ণীত উচ্চতম সাধাবণ গুণনীয়কই ইষ্ট গুণনীয়ক হইবে।

এই নিয়মেব হেতু নিম্নে প্রদর্শিত হইতেছে।

মনে কর ক, খ, গ, ও ঘএব উ, সা, গ, নির্ণয় করিতে হইবে, এবং মনে কর

ক ও খএব উ, সা, গ = প,
প ও গএব = ফ,
এবং ফ ও ঘএব = ব।

তাহা হইলে,

ক ও খএব প্রত্যেক সাধারণ ভাজক পএব ভাজক (৫১ ধারা দ্রষ্টব্য)
∴ ক, খ, ও গএব প্রত্যেক সাধারণ ভাজক প ও গএব ভাজক,
এবং ∴ ক, খ, ও গএব উ, সা, গ, প ও গএব সাধারণ ভাজক।
আবার
∵ পএর প্রত্যেক ভাজক ক ও খএব সাধাবণ ভাজক।
∴ প ও গএব প্রত্যেক সাধারণ ভাজক ক, খ, ও গএব সাধারণ ভাজক,
এবং ∴ প ও গএর উ, সা, গ, ক, খ, ও গএর সাধারণ ভাজক।
সুতবাং প ও গএব উ, সা, গ, ক, খ, ও গএব উ, সা, গ।
এইরূপে দেখা যাইবে,
ফ ও ঘএব উ, সা, গ, ক, খ, গ, ও ঘএব উ, সা, গ,। ইত্যাদি।

৫৩। দুই বা ততোধিক রাশিব সাধাবণ গুণিতক সম্বন্ধে পাটীগণিতে যাহা বলা হইয়াছে (পাটীগণিতের ৫৪ ও ৬১ ধাবা দ্রষ্টব্য) তাহার পুনরুক্তি এখানে নিষ্প্রয়োজন।

তদ্ব্যতিরিক্ত বীজগণিতে বলা আবশ্যক এই যে পাটীগণিতে যেখানে 'সংখ্যা' শব্দ প্রয়োগ করা হইয়াছে বীজগণিতে সেখানে 'রাশি' শব্দ ব্যবহার করিতে হইবে। এবং গুণনীয়ক সম্বন্ধে যেমন পাটীগণিতের 'গরিষ্ঠ' শব্দ স্থলে বীজগণিতে 'উচ্চতম' শব্দ ব্যবহার করা উচিত, গুণিতক সম্বন্ধে তেমনই পাটীগণিতের 'লঘিষ্ঠ' শব্দ স্থলে বীজগণিতে 'নিম্নতম' শব্দ ব্যবহার উচিত।

এই কএকটী কথা মনে রাখিলে পাটীগণিতের ৬১,৬২, ও ৬৩ (১) ধারায় যাহা বলা হইয়াছে বীজগণিতের নিম্নতম সাধারণ গুণিতক (নি, সা, গ,) সম্বন্ধে তাহা খাটিবে।

৫৪। দুইটি রাশির নিম্নতম সাধারণ গুণিতক নির্ণয়ের নিয়ম। রাশিদ্বয়ের গুণফলকে তাহাদের উ, সা, গ, দ্বারা ভাগ কর। সেই ভাগফল তাহাদের নি, সা, গ, হইবে।

কারণ রাশিদ্বয়ের নি, সা, গ, তাহাদের প্রত্যেকের দ্বারা ভাজ্য, সুতরাং তাহাতে তাহাদের প্রত্যেকের সমস্ত মৌলিক উৎপাদকগুলি একবার এবং কেবল একবারমাত্র থাকা আবশ্যক। কিন্তু রাশিদ্বয়ের গুণফলে তাহাদের সাধারণ উৎপাদকগুলি দুইবার থাকিবে। এবং তাহাদের উ, সা, গ, এই সাধারণ উৎপাদকগুলির গুণফল। সুতরাং তাহাদের গুণফলকে তাহাদের উ, সা, গ, দিয়া ভাগ করিলে সেই ভাগফলে তাহাদের প্রত্যেকের সমস্ত মৌলিক উৎপাদকগুলি একবার এবং কেবল একবারমাত্র থাকিবে।

৫৫। যে যে রাশির নি, সা, গ, নির্ণয় করিতে হইবে তাহাদের উৎপাদক বিশ্লেষ যদি সহজে হয়, তাহা হইলে তাহাদের নি, সা, গ, নির্ণয় অতি সহজেই হইতে পারে। কারণ তাহাদের প্রত্যেকের সমস্ত উৎপাদক একবার এবং কেবল একবারমাত্র লইয়া তাহাদের গুণফল লইলেই ইষ্ট নি, সা, গ, পাওয়া যাইবে।

এই ধারায় এবং ইহার পূর্ব্ববর্ত্তী ধারায় যাহা বলা হইয়াছে নিম্নের উদাহরণদ্বয় দৃষ্টে তাহা স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

(১) উদাহরণ। $য^৩+য^২-২$, ও $য^৩+২য^২-৩$,
ইহাদের নি, সা, গ, নির্ণয় কর।

$স^৩+স^২-২)\,স^৩+২স^২-৩\,(১$
$\quad স^৩+\ স^২-২$
$\qquad স^২-১)\,স^৩+স^২-২\,(স+১$
$\qquad\quad স^৩-স$
$\qquad\qquad স^২+স-২$
$\qquad\qquad স^২-১$
$\qquad\qquad\quad স-১)\,স^২-১\,(স+১$
$\qquad\qquad\qquad স^২-স$
$\qquad\qquad\qquad\quad স-১$
$\qquad\qquad\qquad\quad স-১$

∴ বাশিদ্বয়ের উ, সা, গ, -- $স-১$ ।

∴ ইষ্ট নি, সা, গ, = $\dfrac{(স^৩+স^২-২)(স^৩+২স^২-৩)}{স-১}$

$=স^৫+স^৪+৬স^৩+স^২-৬স-৬$ ।

(২) উদাহরণ। $৩স^২-১০কস+৭ক^২$,

ও $স^৩-৫কস^২+৭ক^২স-৩ক^৩$,

ইহাদের নি, সা, গ, নির্ণয় কর।

দেখা যাইতেছে $৩স^২-১০কস+৭ক^২$

$=(স-ক)(৩স-৭ক)$,

এবং $স^৩-৫কস^২+৭ক^২স-৩ক^৩$

$=স^২(স-ক)-৪কস(স-ক)+৩ক^২(স-ক)$

$=(স-ক)(স^২-৪কস+৩ক^২)$

$=(স-ক)(স-ক)\ (স-৩ক)$ ।

∴ ইষ্ট নি, সা, গ, = $(স-ক)(স-ক)\ (স-৩ক)(৩স-৭ক)$ ।

৫৬। দুইটি রাশির নিম্নতম সাধারণ গুণিতক তাহাদের অপর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকেব ভাজক।

কারণ রাশিদ্বয়ের নি, সা, গ, এতে তাহাদের প্রত্যেকেব সমস্ত উৎপাদক একবার ও কেবল একবারমাত্র আছে, এবং তাহাদের অন্য প্রত্যেক সাধারণ গুণিতকে সেই সমস্ত উৎপাদক আছে আব তদতিরিক্ত অপর উৎপাদকও আছে।

৫৭। তিন বা ততোধিক রাশির নি, সা, গ, নির্ণয়ের নিয়ম।

অগ্রে প্রথম ও দ্বিতীয় রাশির নি, সা, গ, নির্ণয় কর। তার পর সেই নি, সা, গ, ও তৃতীয় রাশির নি, সা, গ, নির্ণয় কর। তদনন্তর এই নি, সা, গ, ও চতুর্থ রাশির নি, সা, গ, নির্ণয় কর। এইরূপে শেষরাশি পর্য্যন্ত চল। তাহা হইলে সর্ব্বশেষের নির্ণীত নি, সা, গ, ই ইষ্ট নি, সা, গ, হইবে।

এই নিয়মের হেতু নিম্নে প্রদর্শিত হইতেছে।

মনে কর, ক, খ, গ, ও ঘ এর নি, সা, গ, নির্ণয় করিতে হইবে, এবং মনে কর,

ক ও খএর নি, সা, গ, প,
প ও গএর ফ,
এবং ফ ও ঘএর ব।

তাহা হইলে

∵ ক ও খ এর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতক প'র গুণিতক

(৫৬ ধারা দ্রষ্টব্য)

∴ ক, খ, ও গএর নি, সা, গ, প ও গএর সাধারণ গুণিতক।

আবার

∵ প ও গএর প্রত্যেক সাধারণ গুণিতক ক, খ, ও গএর সাধারণ গুণিতক।

∴ প ও গএর নি, সা, গ, ক,খ, ও গএর সাধারণ গুণিতক।

সুতরাং প ও গএর নি, সা, গ, ক,খ, ও গএর নি, সা, গ।

এইরূপে দেখা যাইবে

ফ ও ঘ এর নি, সা, গ, ক,খ,গ, ও ঘ এর নি, সা, গ,।

ইত্যাদি।

৩। উদাহরণমালা।

১। নিম্নলিখিত রাশিগুলির উ, সা, গ, নির্ণয় কর—

(১) $স^{২}-ষ^{২}$ ও $স^{২}-২সষ+ষ^{২}$।

(২) $স^{২}+৫স+৬$ ও $স^{২}+৭স+১০$।

(৩) $স^{৩}+৬স^{২}+১১স+৬$ ও $স^{৩}+৯স^{২}+২৭স+২৭$।

(৪) $স^{৩}+৪স^{২}-৫$ ও $স^{৩}-স+২$।

(৫) $স^{৩}-৯স^{২}+২৬স-২৪, স^{৩}-১০স^{২}+৩১স-৩০$,

ও $স^{৩}-১১স^{২}+৩৮স-৪০$।

২। নিম্নলিখিত রাশিগুলির নি, সা, গ, নির্ণয় কর

(১) $স^{৪}+স^{৩}+২স-৪$ ও $স^{৩}+৩স^{২}-৪$।

(২) $স^{৫}-৫স^{৩}+স^{২}+৪স-৪$ ও $স^{৪}+স^{৩}-৬স^{২}-৪স+৮$।

(৩) $৬স^{৩}+৭স^{২}-৯স+২$ ও $৮স^{৪}+৬স^{৩}-১৫স^{২}+৯স-২$।

(৪) $স^{৩}-৭স^{২}-৮০স+৫৭৬, ৩স^{২}-১৪স-৮০$,

ও $৩স^{২}+১৭স-৯০$।

(৫) $স^{৩}-২স^{২}-১৯স+২০, স^{৩}+২স^{২}-২৩স-৬০$,

ও $স^{৪}+৭স^{৩}-৪স^{২}-৫২স+৪৮$।

চতুর্থ অধ্যায়।

ভগ্নাংশ।

৫৮। ভগ্নাংশ সম্বন্ধে পাটীগণিতের দ্বিতীয় অধ্যায়ের প্রথম ভাগে যাহা বলা হইয়াছে তাহার পুনরুক্তি নিষ্প্রয়োজন।

পাটীগণিতের ৬৫ হইতে ৮০ ধারায় যাহা বলা হইয়াছে তৎসমুদয়ই বীজগণিতে খাটে। তদতিরিক্ত যাহা বলিবার আছে তাহাই এই স্থলে বলা যাইবে।

৫৯। মূল ১ কে খভাগে ভাগ করিয়া তাহার কভাগ লইলে যে রাশি হয় তাহাকে ভগ্নাংশ বলে।

কিন্তু ১কে খভাগে ভাগ করিয়া তাহার ক ভাগ
লইলে যাহা হয়,
ক কে খ ভাগে ভাগ করিয়া তাহার ১ভাগ
লইলে ঠিক তাহাই হইবে।

কারণ ককে খ ভাগে ভাগ করার অর্থ এই যে

ক এতে যতগুলি ১ আছে তাহার প্রত্যেককে
খ ভাগে ভাগ করিয়া প্রত্যেকের এক এক ভাগ লওয়া।

সুতরাং ১ কে খ ভাগে ভাগ করিয়া তাহার ক ভাগ লইলে যে ভগ্নাংশ হয় তাহার আর একটি অর্থ ককে খ ভাগে ভাগ করিয়া তাহার ভাগফল। অতএব সেই ভগ্নাংশ $\frac{ক}{খ}$এই আকারে লিখিত হইতে পারে, কারণ $\frac{ক}{খ}$ এবং ক ÷ খ একই অর্থ বোধক সঙ্কেত।

৬০। ভগ্নাংশের অর্থ হইতে দেখা যাইতেছে

(১) $\frac{ক}{খ} \times গ = \frac{ক \times গ}{খ} = \frac{ক}{খ \div গ}$।

কারণ $\frac{ক}{খ}$ ভগ্নাংশকে গ গুণ করার অর্থ,

একের ক সংখ্যক অংশকে গ গুণ করা,

অথবা সেই ক সংখ্যক প্রত্যেক অংশকে গ গুণ বড় করা,

অর্থাৎ এক কে খ ভাগে ভাগ না করিয়া খ ÷ গ ভাগে

অর্থাৎ পূর্ব্বাপেক্ষা গ গুণে অল্প সংখ্যক ভাগে

ভাগ করা।

(২) $\frac{ক}{খ} \div গ = \frac{ক \div গ}{খ} = \frac{ক}{খ \times গ}$,

কারণ $\frac{ক}{খ}$ ভগ্নাংশকে গ ভাগে ভাগ করার অর্থ,

একের ক সংখ্যক অংশকে গ ভাগে ভাগ করা,

অথবা সেই ক সংখ্যক প্রত্যেক অংশকে গ গুণ ছোট করা,

অর্থাৎ এক কে খ ভাগে ভাগ না করিয়া খ × গ ভাগে ভাগ করা।

(৩) $\frac{ক}{খ} = \frac{ক \times গ}{খ \times গ}$,

কারণ ক কে গ দিয়া গুণ করায় গৃহীত ভাগের সংখ্যা যে মাত্রায় বৃদ্ধি পাইল,

খ কে গ দিয়া গুণ করায় প্রত্যেক ভাগের পরিমাণ ঠিক সেই মাত্রায় হ্রাস পাইল।

৬১। উপরের ধারার (১), (২), (৩) সাম্য স্মরণ রাখিলে ভগ্নাংশের আকার পরিবর্ত্তন ও যোগ বিয়োগ ক্রিয়া সম্পাদন করা যাইতে পারে।

যথা, $\frac{ক}{খ} \pm \frac{গ}{ঘ} = \frac{কঘ}{খঘ} \pm \frac{গখ}{ঘখ}$

$$= \frac{কঘ \pm গখ}{খঘ}।$$

কারণ, $\frac{\text{ক}}{\text{খ}} = \frac{\text{কঘ}}{\text{ঘখ}}$, $\frac{\text{গ}}{\text{ঘ}} = \frac{\text{গখ}}{\text{ঘখ}}$,

এবং ১ কে খঘ ভাগে ভাগ করিয়া তাহারই
কঘ ও গখ ভাগের যোগ বা বিয়োগের ফল অবশ্যই
সেইরূপ কঘ±গখ ভাগ হইবে,
অর্থাৎ ১ এর খঘ ভাগের কঘ± গখ ভাগ হইবে।

৬২। ভগ্নাংশের গুণনের, অর্থাৎ $\frac{\text{ক}}{\text{খ}}$ কে $\frac{\text{গ}}{\text{ঘ}}$ দিয়া গুণ করার, অর্থ নির্দ্দেশ অগ্রে করিয়া পরে তাহার প্রক্রিয়া নিরূপণ করিতে হইবে। কারণ গুণনের সহজ অর্থ এ স্থলে খাটে না। $\frac{\text{ক}}{\text{খ}}$ কে গ দিয়া গুণ করার অর্থ তাহাকে গ বার লওয়া, কিন্তু তাহাকে $\frac{\text{গ}}{\text{ঘ}}$ দিয়া গুণ করার অর্থ তাহাকে $\frac{\text{গ}}{\text{ঘ}}$ বার লওয়া, একথা বলা যায় না, কেন না $\frac{\text{গ}}{\text{ঘ}}$ অখণ্ড সংখ্যা না হইলে $\frac{\text{গ}}{\text{ঘ}}$ বার লওয়ার সহজে কোন অর্থ নাই। তবে "$\frac{\text{ক}}{\text{খ}}$ কে ঘ ভাগে ভাগ করিয়া তাহারই গ সংখ্যক ভাগ লওয়া যাইবে" $\frac{\text{ক}}{\text{খ}}$ কে $\frac{\text{গ}}{\text{ঘ}}$ বার লওয়ার অর্থাৎ $\frac{\text{গ}}{\text{ঘ}}$ দিয়া গুণ করিবার, এই অর্থ নির্দ্দেশ করিলে, তাহা গুণনের সহজ অর্থের সহিত অসঙ্গত হয় না বরং সুসঙ্গতই হয়, এবং ভগ্নাংশের গুণন এই অর্থেই লওয়া যাইবে। তাহা হইলে গুণন ক্রিয়া এইরূপ হইবে, যথা

$$\frac{\text{ক}}{\text{খ}} \times \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}} = \left(\frac{\text{ক}}{\text{খ}} \div \text{ঘ}\right) \times \text{গ} = \frac{\text{ক}}{\text{খঘ}} \times \text{গ}$$

$$= \frac{\text{কগ}}{\text{খঘ}}$$ । [৬০ ধারায় (১) ও (২) দ্রষ্টব্য]

৬৩। ভাগের সহজ অর্থানুসারে ভাগফলকে ভাজক দিয়া গুণ করিলে ভাজ্যকে পাওয়া যাইবে।

অতএব $\frac{ক}{খ} \div \frac{গ}{ঘ}$ এমন একটি ভগ্নাংশ

যাহাকে $\frac{গ}{ঘ}$ দিয়া উপবেব ধাবানুসাবে গুণ কবিলে গুণফল $\frac{ক}{খ}$ হইবে।

সহজেই দেখা যাইতেছে $\frac{কঘ}{খগ}$ কে $\frac{গ}{ঘ}$ দিযা গুণ কবিলে

$$গুণফল = \frac{কঘ}{খগ} \times \frac{গ}{ঘ} = \frac{কঘ - ঘ}{খগ - গ} = \frac{ক}{খ}$$ । (৬০ ধাবা দ্রষ্টব্য)

$$অতএব\ \frac{ক}{খ} \div \frac{গ}{ঘ} = \frac{কঘ}{খগ}$$ ।

৬৪। উপবেব ৬০ হইতে ৬৩ ধাবাতে ক, খ, গ, ঘ ইহাবা অখণ্ড বাশি বলিয়া মানিয়া লওয়া গিয়াছে। কিন্তু ক, খ, গ, ঘ খণ্ডবাশি অর্থাৎ ভগ্নাংশ হইলেও ঐ ঐ ধাবাব তত্ত্বগুলি সত্য হইবে।

যথা, মনে কব

$$ক = \frac{প}{ফ},\ খ = \frac{ব}{ভ},\ গ = \frac{ম}{য}।$$

তাহা হইলে

$$\frac{ক}{খ} = \frac{প}{ফ} \div \frac{ব}{ভ} = \frac{পভ}{ফব},$$

$$এবং\quad কগ = \frac{প}{ফ} \times \frac{ম}{য} = \frac{পম}{ফয}।$$

$$খগ = \frac{ব}{ভ} \times \frac{ম}{য} = \frac{বম}{ভয}।$$

$$অতএব\ \frac{কগ}{খগ} = \frac{পম}{ফয} \div \frac{বম}{ভয} = \frac{পম}{ফয} \times \frac{ভয}{বম}$$

$$= \frac{পভ}{ফব} = \frac{ক}{খ}।$$

৪ উদাহরণমালা।

নিম্নলিখিত ভগ্নাংশগুলিকে সরল কর—

(১) $\dfrac{৩স^{৩}-২স^{২}-স}{৪স^{৩}-২স^{২}-৩স+১}$।

(২) $\dfrac{স৩-৬স^{২}-৩৭স+২১০}{স^{৩}+৪স^{২}-৪৭স-২১০}$।

(৩) $\dfrac{১০স^{৩}+১৯স^{২}-৯}{২৫স^{৩}-১৯স+৬}$।

(৪) $\dfrac{স^{২}-(য-শ)^{২}}{(শ+স)^{২}-য^{২}}+\dfrac{য^{২}-(শ-স)^{২}}{(স+য)^{২}-শ^{২}}+\dfrac{শ^{২}-(স-য)^{২}}{(য+শ)^{২}-স^{২}}$।

(৫) $\dfrac{ক^{২}}{(ক-খ)(ক-গ)}+\dfrac{খ^{২}}{(খ-গ)(খ-ক)}+\dfrac{গ^{২}}{(গ-ক)(গ-খ)}$।

(৬) $\dfrac{\dfrac{ক+খ}{ক-খ}+\dfrac{ক-খ}{ক+খ}}{\dfrac{ক+খ}{ক-খ}-\dfrac{ক-খ}{ক+খ}}$।

(৭) $\dfrac{ক^{৪}-খ^{৪}}{ক^{২}+খ^{২}-২কখ}\times\dfrac{ক-খ}{ক^{২}+কখ}$।

(৮) $\left\{\dfrac{স}{ক}+\dfrac{২স^{২}}{ক(খ-স)}\right\}\left\{\dfrac{ক}{স}-\dfrac{২কস}{স(খ+স)}\right\}$।

(৯) $\left(\dfrac{ক^{৩}}{খ^{৩}}+\dfrac{খ^{৩}}{ক^{৩}}\right)\div\left(\dfrac{ক}{খ}+\dfrac{খ}{ক}\right)$।

(১০) $\dfrac{ক}{খ+\dfrac{গ}{ঘ+\dfrac{ঙ}{চ}}}$।

পঞ্চম অধ্যায়।

শক্তিপ্রসারণ ও মূলাকর্ষণ।

৬৫। যে কোন রাশির শক্তি সেই রাশির উপরে কিঞ্চিৎ দক্ষিণে সেই শক্তিসূচক চিহ্ন লিখিত হইয়া সঙ্ক্ষেপে প্রকাশিত হয়, অথবা সেই রাশির বারংবার গুণন দ্বারা বিস্তৃতরূপে প্রকাশিত হয়। এই বিস্তৃতরূপে রাশির শক্তিপ্রকাশকে **শক্তিপ্রসারণ** বলা যাইবে। তাহাকে **ঘাতাবেশও** বলে।

যথা ক এর দ্বিতীয় শক্তি,

$ক^২$ এবং কক

এই উভয় প্রকারেই প্রকাশিত হইতে পারে।

সেইরূপ (ক + খ) এর তৃতীয় শক্তি,

$(ক+খ)^৩$ এবং $ক^৩+৩ক^২খ+৩কখ^২+খ^৩$

এই উভয় প্রকারেই প্রকাশিত হইতে পারে।

৬৬। একপদ রাশির শক্তিপ্রসারণ সহজ।

অনেকপদ রাশির শক্তিপ্রসারণ তত সহজ নহে।

ক্রমান্বয়ে গুণন দ্বারা তাহা সম্পন্ন হইতে পারে, কিন্তু সে প্রণালী শ্রমসাধ্য।

দ্বিপদের যে কোন শক্তিপ্রসারণ সম্বন্ধে একটি সাধারণ নিয়ম আছে তাহা একাদশ অধ্যায়ে বিবৃত হইবে। এখানে দ্বিপদ ও বহুপদ রাশির দ্বিতীয় ও তৃতীয় শক্তি প্রসারণ সম্বন্ধে দুই একটি কথা বলা যাইবে।

৬৭। গুণন দ্বারা জানা যায়,

$(ক+খ)^২ = ক^২+২কখ+খ^২$ ।

$(ক+খ)^৩ = ক^৩+৩ক^২খ+৩কখ^২+খ^৩$ ।

$$(ক+খ+গ)^২ = ক^২ + ২ক(খ+গ) + খ^২ + ২খগ + গ^২$$
$$= (ক+খ)^২ + ২গ(ক+খ) + গ^২ ।$$
$$(ক+খ+গ+ঘ)^২ = ক^২ + ২ক(খ+গ+ঘ) + খ^২ + ২খ(গ+ঘ)$$
$$+ গ^২ + ২গঘ + ঘ^২$$
$$= (ক+খ+গ)^২ + ২ঘ(ক+খ+গ) + ঘ^২ ।$$
$$(ক+খ+গ)^৩ = (ক+খ)^৩ + ৩(ক+খ)^২ গ + ৩(ক+খ)গ^২ + গ^৩$$
$$= ক^৩ + ৩ক^২খ + ৩কখ^২ + খ^৩$$
$$+ ৩ক^২গ + ৬কখগ + ৩খ^২গ$$
$$+ ৩কগ^২ + ৩খগ^২ + গ^৩$$
$$= ক^৩ + ৩ক^২খ + ৩ক^২গ + ৩কখ^২ + ৬কখগ + ৩কগ^২$$
$$+ খ^৩ + ৩খ^২গ + ৩খগ^২ + গ^৩ ।$$

৬৮। যেমন $ক^২$, কএর দ্বিতীয় শক্তি বা **বর্গ**,

এবং $ক^২ + ২কখ + খ^২$, $(ক+খ)$এর দ্বিতীয় শক্তি বা **বর্গ**,

তেমনই ক ও $(ক+খ)$, $ক^২$ ও $ক^২ + ২কখ + খ^২$, ইহাদের **বর্গমূল**।

কোন রাশির বর্গমূলের চিহ্ন এই $\sqrt{\ }$,

যথা, $\sqrt{ক^২} = ক$ ।

কোন রাশির ঘনমূলের চিহ্ন এই $\sqrt[৩]{\ }$,

যথা, $\sqrt[৩]{ক^৩} = ক$ ।

যেমন $ক^ন$, ক এর ন তম শক্তি,

তেমনই ক, $ক^ন$ এর ন তম মূল,

এবং $\sqrt[ন]{ক^ন} = ক$ ।

৬৯। যে কোন রাশির যে কোন শক্তি, সহজেই হউক বা শ্রমেই হউক, সর্ব্বত্র নির্ণয় করা যাইতে পারে। যদি কোন সহজ নিয়ম অবলম্বনীয় না হয়, অন্ততঃ ক্রমান্বয়ে গুণন দ্বারা কার্য্য সিদ্ধ হইবে। এবং কোন রাশির বর্গ ও ঘন নির্ণয়ের সহজ নিয়ম পূর্ব্বেই দর্শিত হইয়াছে (৬৭ ধারায় দ্রষ্টব্য)।

কিন্তু যে কোন রাশির বর্গমূল বা ঘনমূল নির্ণয় সহজ নহে। এবং প্রদত্ত রাশি কোন রাশির বর্গ বা ঘন না হইলে তাহার ঠিক বর্গমূল বা ঘনমূল নির্ণয় করা যায় না।

৭০। কোন রাশির বর্গমূল নির্ণয়ের নিয়ম নিরূপণ করিতে হইলে দেখা আবশ্যক, মূল হইতে বর্গ কিরূপে উৎপন্ন হয়, অর্থাৎ মূলরাশি ও তাহার বর্গ পরস্পরের আকারের কিরূপ সম্বন্ধ।

আমরা জানি,

$(ক+খ)^২ = ক^২ + ২কখ + খ^২$ ।

ইহাতে দেখা যাইতেছে বর্গরাশি কোন একটি প্রধান অক্ষরের শক্তি-ক্রমে সাজাইলে, তাহার প্রথম পদের বর্গমূলই বর্গমূলের প্রথম পদ, ও বর্গমূলের সেই প্রথম পদের দ্বিগুণ দ্বারা বর্গরাশির দ্বিতীয় পদকে ভাগ করিলে বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ পাওয়া যায়। এবং ক্রমান্বয়ে বর্গমূলের প্রথম পদের বর্গ অর্থাৎ $ক^২$, ও সেই প্রথম পদের দ্বিগুণে দ্বিতীয় পদ যোগ করিয়া দ্বিতীয় পদের সহিত সেই যোগফলের গুণফল, অর্থাৎ $(২ক+খ)খ$, বর্গ রাশি হইতে বাদ দিলে, আর কিছু বাকি থাকে না।

আবার

$(ক+খ+গ)^২ = (ক+খ)^২ + ২(ক+খ)গ + গ^২$ ।

অতএব বর্গমূল যদি ত্রিপদ রাশি হয়, তাহা হইলে তাহার প্রথম দুই পদ $ক+খ$ নিরূপিত হইবার পর, সেই $(ক+খ)$কে কএর ন্যায় জ্ঞান করিয়া, তাহার দ্বিগুণ অর্থাৎ $২(ক+খ)$ দিয়া বর্গ রাশির $(ক+খ)^২$ বাদ দেওয়ার পর অবশিষ্টাংশের প্রথম পদদ্বয় অর্থাৎ $২(ক+খ)গ$ কে ভাগ করিলে মূলের তৃতীয় পদ গ পাওয়া যায়। এবং বর্গরাশি হইতে $\{২(ক+খ)+গ\}গ$ বাদ দিলে আর কিছু বাকি থাকে না।

বর্গমূলে আরও পদ থাকিলে উক্ত প্রণালীতে তাহা নিরূপণ করা যায়।

অতএব বর্গমূল নিরূপণের সাধারণ নিয়ম নিম্নের ধারায় লিখিত মত হইবে।

৭১। বর্গমূল নিরূপণের নিয়ম।

বর্গরাশি প্রধান অক্ষরের শক্তিক্রমে সাজাও।

তাহার পর প্রথম পদেব বর্গমূল নির্ণয় করিয়া তাহা বর্গমূলেব প্রথম পদ বলিয়া লিখ, এবং তাহাব বর্গ বর্গবাশি হইতে বাদ দিয়া বিয়োগফল লিখ। তদনন্তব, সেই বর্গমূলেব প্রথম পদের দ্বিগুণ দ্বারা ঐ বিয়োগফলের প্রথম পদকে ভাগ করিয়া যে ভাগফল হয় তাহাকে বর্গমূলের দ্বিতীয় পদ বলিয়া লিখ, এবং বর্গমূলের প্রথম পদের দ্বিগুণ ও দ্বিতীয় পদ একত্র করিয়া সেই যোগফল ঐ দ্বিতীয় পদ দ্বারা গুণ করিয়া সেই গুণফল উক্ত বিয়োগফল হইতে বাদ দেও। যদি কিছু বাকি না থাকে তবে ইষ্ট বর্গমূল ঐ দ্বিপদরাশি। যদি কিছু বাকি থাকে, তবে তাহাব প্রথম দুই পদকে বর্গমূলের লব্ধ দুই পদের দ্বিগুণ দ্বারা ভাগ করিয়া যে ভাগফল হয় তাহাকে বর্গমূলের তৃতীয় পদ বলিয়া লিখ, এবং তাহাব পর পূর্ব্বমত প্রক্রিয়া চালাও। এইরূপে যদি আর বাকি কিছু না থাকে তবে ঠিক বর্গমূল পাওয়া যাইবে।

নিম্নের উদাহরণদ্বয় দৃষ্টে প্রক্রিয়াব প্রণালী ও তাহাব হেতু স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

(১) উদাহবণ। ৪স^{২} + ১২সষ + ৯ষ^{২} ইহাব বর্গমূল নির্ণয় কব।

৪স^{২} + ১২সষ + ৯ষ^{২} (২স + ৩ষ
৪স^{২}
৪স + ৩ষ | ১২সব + ৯ষ^{২}
৩ষ
১২সষ + ৯ষ^{২} | ১২সষ + ৯ষ^{২} ∴ বর্গমূল = ২স + ৩ষ।

(২) উদাহরণ। স^{৬} + ৮স^{৪} + ২স^{৩} + ১৬স^{২} − ৮স + ১ ইহার বর্গমূল নির্ণয় কর।

স^{৬} + ৮স^{৪} − ২স^{৩} + ১৬স^{২} − ৮স + ১ (স^{৩} + ৪স − ১
স^{৬}
২স^{৩} + ৪স | ৮স^{৪} − ২স^{৩} + ১৬স^{২}
৪স
৮স^{৪} + ১৬স^{২} | ৮স^{৪} + ১৬স^{২}
২স^{৩} + ৮স − ১। | − ২স^{৩} − ৮স + ১
| − ২স^{৩} − ৮স + ১ ∴ বর্গমূল = স^{৩} + ৪স − ১।

৭২। সংখ্যার বর্গমূল নির্ণয় সম্বন্ধে পাটীগণিতের অষ্টম অধ্যায়ে যাহা বলা হইয়াছে তদতিরিক্ত আর কিছু এ স্থলে বলিবার প্রয়োজন নাই।

৭৩। বর্গমূলনির্ণয়ের নিয়ম নিরূপণ যে প্রণালীতে করা গিয়াছে, ঘন-মূলনির্ণয়ের নিয়ম নিরূপণও সেই প্রণালীতে করা যাইবে।

আমরা জানি

$(ক+খ)^৩ = ক^৩ + ৩ক^২খ + ৩কখ^২ + খ^৩$।

ইহাতে দেখা যাইতেছে ঘন রাশি কোন একটি প্রধান অক্ষরের শক্তি অনুসারে সাজাইলে, তাহার প্রথম পদের ঘনমূলই ঘনমূলের প্রথম পদ। আর ঘনমূলের সেই প্রথম পদের বর্গের তিনগুণ দ্বারা ঘনরাশির দ্বিতীয় পদকে ভাগ করিলে ঘনমূলের দ্বিতীয় পদ পাওয়া যায়। এবং ক্রমান্বয়ে ঘনমূলের প্রথম পদের ঘন অর্থাৎ $ক^৩$, ও সেই প্রথম পদের বর্গের তিনগুণে প্রথম ও দ্বিতীয় পদের গুণফলের তিনগুণ ও দ্বিতীয় পদের বর্গ যোগ করিয়া সেই যোগফলের সহিত দ্বিতীয় পদের গুণফল অর্থাৎ $৩ক^২খ + ৩কখ^২ + খ^৩$, ঘন রাশি হইতে বাদ দিলে আর কিছুই বাকি থাকে না।

আবার

$(ক+খ+গ)^৩ = (ক+খ)^৩ + ৩(ক+খ)^২গ + ৩(ক+খ)গ^২ + গ^৩$।

অতএব ঘনমূল ত্রিপদ হইলে, তাহার প্রথম দুইপদ অর্থাৎ $(ক+খ)$ নিরূপিত হইবার পর, সেই $(ক+খ)$ কে কএর ন্যায় জ্ঞান করিয়া তাহার বর্গের ত্রিগুণ অর্থাৎ $৩(ক+খ)^২$ দিয়া ঘন রাশির $(ক+খ)^৩$ বাদ দেওয়ার পর অবশিষ্টাংশের প্রথম পদত্রয় অর্থাৎ $৩(ক+খ)^২গ$ কে ভাগ করিলে ঘনমূলের তৃতীয় পদ গ পাওয়া যায়। এবং ঘনরাশির বাকি অংশ হইতে $৩(ক+খ)^২গ + ৩(ক+খ)গ^২ + গ^৩$ বাদ দিলে আর কিছু বাকি থাকে না।

ঘনমূলের আরও পদ থাকিলে উক্ত প্রণালীতে তাহা নিরূপণ করা যায়।

৭৪। উপরে যাহা বলা হইল তাহা হইতে ঘনমূল নিরূপণের নিয়ম সহজেই দেখা গেল। এবং নিম্নের উদাহরণদ্বয় দৃষ্টে তদনুসারে প্রক্রিয়ার প্রণালী স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

(১) উদাহরণ। $৮স^৩+৩৬স^২য+৫৪সয^২+২৭য^৩$ ইহার ঘনমূল নির্ণয় কর।

$$৮স^৩+৩৬স^২য+৫৪সয^২+২৭য^৩\ (২স+৩য$$
$$৮স^৩$$

$$১২স^২$$
$$+(৬স+৩য)৩য \quad\Big|\quad ৩৬স^২য+৫৪সয^২+২৭য^৩$$
$$১২স^২+১৮সয+৯য^২ \quad\Big|\quad ৩৬স^২য+৫৪সয^২+২৭য^৩$$

$\therefore$ ঘনমূল $=২স+৩য$।

(২) উদাহরণ। $স^৬+৬স^৫+২১স^৪+৪৪স^৩+৬৩স^২+৫৪স+২৭$ ইহার ঘনমূল নির্ণয় কর।

$$স^৬+৬স^৫+২১স^৪+৪৪স^৩+৬৩স^২+৫৪স+২৭\ (স^২+২স+৩$$
$$স^৬$$

$$৩স^৪$$
$$+(৩স^২+২স)২স \quad\Big|\quad ৬স^৫+২১স^৪+৪৪স^৩$$
$$৩স^৪+৬স^৩+৪স^২ \quad\Big|\quad ৬স^৫+১২স^৪+৮স^৩$$

$$৩(স^৪+৪স^৩+৪স^২)$$
$$+\{৩(স^২+২স)+৩\}\times ৩ \quad\Big|\quad ৯স^৪+৩৬স^৩+৬৩স^২+৫৪স+২৭$$
$$৩স^৪+১২স^৩+২১স^২+১৮স+৯ \quad\Big|\quad ৯স^৪+৩৬স^৩+৬৩স^২+৫৪স+২৭$$

$\therefore$ ঘনমূল $=স^২+২স+৩$।

৭৫। কোন সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয়ের নিয়ম উপরের নিয়ম হইতেই নিরূপণ করা যাইতে পারে। তবে বীজগণিতে রাশির যেরূপ পদবিচ্ছেদ আছে, পাটীগণিতে সংখ্যার তাহা নাই, এই জন্য কোন্ সংখ্যার ঘনমূলে ক'টি অঙ্ক থাকিবে তাহা অগ্রে স্থির করা আবশ্যক।

আমরা জানি ১ এর ঘনমূল $=$ ১,
১০০০ এর ঘনমূল $=$ ১০,
১০০০০০০ এর ঘনমূল $=$ ১০০,
ইত্যাদি।

অতএব, ১ হইতে ৯৯৯ এর ঘনমূলের অখণ্ড ভাগে ১টি অঙ্ক থাকিবে,
১০০০ হইতে ৯৯৯৯৯৯ এর ... . . ২টি ... ... ,
১০০০০০০ হইতে ৯৯৯৯৯৯৯৯৯ এর .. ... ৩টি . .. ,
ইত্যাদি।

আমরা ইহাও জানি যে,

০০১ এর ঘনমূল ১,
০০০০০১ এর ০১,
০০০০০০০০১ এর ... ০০১,
ইত্যাদি।

অতএব
ঘন রাশির দশমিক ভাগে ৩ ঘর দশমিক থাকিলে ঘনমূলে ১ ঘর
. . ... ৬ .. . . ২ .
৯ . ... . ৩ . .
দশমিক থাকিবে। ইত্যাদি।

এবং আবশ্যক মত দক্ষিণে ০ দিয়া দশমিকের ঘরের সংখ্যা ৩ এর গুণিতক করিয়া লওয়া যাইতে পারে, ও তাহাতে দশমিকের মূল্য ঠিক থাকে। (পাটীগণিতের ৮৫ ধারা দ্রষ্টব্য)।

সুতরাং যদি কোন সংখ্যার এককের অঙ্কের উপর একটি বিন্দু দিয়া তাহার বামে ও দশমিক বিন্দুর দক্ষিণে প্রত্যেক তৃতীয় অঙ্কের উপরে একটি করিয়া বিন্দু দেওয়া যায়, তাহা হইলে অখণ্ড ভাগের বিন্দুর সংখ্যা ঘনমূলের অখণ্ড ভাগের অঙ্কের সংখ্যাজ্ঞাপক, এবং দশমিক ভাগের বিন্দুর সংখ্যা ঘনমূলের দশমিক ভাগের অঙ্কের সংখ্যাজ্ঞাপক হইবে।

৭৬। সংখ্যার ঘনমূল নির্ণয়ের নিয়ম নির্দ্ধারণার্থে দেখা যাউক ঘনমূল হইতে ঘনসংখ্যা কিরূপে উৎপন্ন হয়।

$$
\begin{aligned}
২৫^৩ &= (২০+৫)^৩ \\
&= ২০^৩ + ৩ \times ২০^২ \times ৫ + ৩ \times ২০ \times ৫^২ + ৫^৩ \\
&= ৮০০০ + ৬০০০ + ১৫০০ + ১২৫ \\
&= ১৫৬২৫।
\end{aligned}
$$

এবং ১৫৬২৫ কে ৭৫ ধারামতে বিন্দুদ্বায়া চিহ্নিত করিলে তাহা ১৫৬২৫ এই আকার ধারণ করে, ও দেখা যায় তাহার ঘনমূলে দুইটি অঙ্ক আছে।

এখন ১৫৬২৫ হইতে তাহাব ঘনমূল ২৫ পাইতে হইলে ৭৩ ও ৭৪ ধাবায় যাহা দর্শিত হইয়াছে তৎপ্রতি দৃষ্টি বাখিয়া পশ্চাৎ লিখিত প্রক্রিয়া অবলম্বন কবা যাইতে পারে—

```
                        ১৫৬২৫ (২০+৫
                         ৮
                        ------
  ৩×২০² = ১২০০    |  ৭৬২৫
  ৩×২০×৫ = ৩০০    |
      ৫² =   ২৫   |
         -------  |  ৭৬২৫
           ১৫২৫   |  ------
```

উপরেব ৭৩ ও ৭৪ ধারার প্রতি লক্ষ্য বাখিয়া এই প্রক্রিয়াব প্রতি দৃষ্টি করিলেই সংখ্যাব ঘনমূল নির্ণয়ের নিয়ম জানা যাইবে। নিম্নেব উদাহরণ দ্বাবা এই কথা আবও স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

উদাহবণ। ৩২৭৬৮ এর ঘনমূল নির্ণয় কর।

```
                        ৩২৭৬৮ (৩০+২
                        ২৭
                        ------
  ৩×৩০² = ২৭০০    |  ৫৭৬৮
  ৩×৩০×২ =  ১৮০   |
      ২² =     ৪   |
         -------  |  ৫৭৬৮
           ২৮৮৪   |  ------
```

∴ ঘনমূল = ৩২

৭৭। যে হেতুক

$$\sqrt[3]{৫} = \sqrt[3]{\frac{৫০০০}{১০০০}} = \sqrt[3]{\frac{৫০০০}{১০}},$$

$$= \sqrt[3]{\frac{৫০০০০০০০}{১০০০০০০০}} = \sqrt[3]{\frac{৫০০০০০০০}{১০০}}$$

= ইত্যাদি,

অতএব যদি কোন সংখ্যার ঠিক ঘনমূল না পাওয়া যায়, তবে তাহাব দক্ষিণে ক্রমশঃ তিন তিনটি কবিয়া ০ শূন্য দিয়া ঘনমূল আকর্ষণ ক্রিয়া যতদূর ইচ্ছা চালান যাইতে পারে। এবং প্রদত্ত সংখ্যাতে সংযুক্ত প্রত্যেক শূন্যত্রয়েব স্থলে ঘনমূলেব দশমিক ভাগে এক একটি করিয়া ঘর বাড়িতে থাকিবে, ও লব্ধ ঘনমূল ক্রমশঃ প্রকৃত ঘনমূলেব সন্নিহিত হইতে থাকিবে।

•উদাহবণ। ৫ এব ঘনমূল নির্ণয় কব।

```
                          ৫ ০০০০০০০০০ (১ ৭০৯
                          ১
                          ----
  ৩×১০² = ৩০০          |  ৪০০০
  ৩×১০×৭ = ২১০         |
      ৭² =  ৪৯         |  ৩৯১৩
      -----------------
           ৫৫৯         |
                          ----------
                             ৮৭০০০
  ৩×১৭০² = ৮৬৭০০
  ৩×১৭০×০ =      ০
       ০² =      ০
      -----------
         ৮৬৭০০                 ০
                             -----------
  ৩×১৭০০² = ৮৬৭০০০০    |  ৮৭০০০০০০০
  ৩×১৭০০×৯ =   ৪৫৯০০   |
        ৯² =       ৮১  |  ৭৮৪৪৩৮২৯
      -----------------
          ৮৭১৫৯৮১      |
                          -----------
                             ৮৫৫৬১৭১
```

∴ ঘনমূল $=$ ১·৭০৯

৫। উদাহরণমালা।

১। নিম্নলিখিত রাশিগুলির শক্তি প্রসারণ কব—

(১) $(ক+২খ+৩গ)^{২}$। (২) $(ক+২খ^{২}+৩গ^{৩})^{২}$।

(৩) $(ক+২খ)^{৩}$। (৪) $(ক+২খ^{২})^{৩}$।

(৫) $(শ^{২}+শ+১)^{৩}$।

২। নিম্নলিখিত বাশি ও সংখ্যাগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর:

(১) $ক^{২}+৪খ^{২}+৯গ^{২}+৪কখ-৬কগ-১২খগ$।

(২) $৪শ^{৪}+১২শ^{৩}+৫শ^{২}-৬শ+১$।

(৩) $ক^{২}+খ^{২}+২কখ+২ক+২খ+১$।

(৪) ১২৩২১। (৫) ২।

৩। নিম্নলিখিত রাশি ও সংখ্যাগুলিব ঘনমূল নির্ণয় কব।

(১) $ক^{৩}+৬ক^{২}খ+৯ক^{২}গ+৩৬কখগ+১২কখ^{২}+২৭কগ^{২}$
$+৮খ^{৩}+৩৬খ^{২}গ+৫৪খগ^{২}+২৭গ^{৩}$।

(২) $শ^{৬}+৩শ^{৫}+৬শ^{৪}+৭শ^{৩}+৬শ^{২}+৩শ+১$;

(৩) $ক^{৩}+৬ক^{২}খ^{২}+১২কখ^{৪}+৮খ^{৬}$।

(৪) ৬৮৫৯।

(৫) ১৪৪১˙৫৪৪।

ষষ্ঠ অধ্যায়।

শক্তিচিহ্ন, করণী, ও ভাবনিক বা কাল্পনিক রাশি।

৭৮। পূর্বে ২০ ধারায় বলা হইয়াছে,

$$ক^{ন} = ক \times ক \times ক \times \quad \text{ন সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত}$$

$$ক^{ম} = ক \times ক \times ক \times \quad \text{ম} \quad \text{...}$$

সুতরাং $ক^{ন} \times ক^{ম} = ক \times ক \times$ ন সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$\times ক \times ক \times$ ম . ..

$= ক \times ক \times ক \times ক \times$ (ন+ম) ..

$= ক^{ন+ম}$।

কিন্তু এস্থলে ন ও ম উভয়েই **অখণ্ড ধনরাশি**।

তাহার পরে ২৬ ধারায় দর্শিত হইয়াছে

$$ক^{-ন} = \frac{১}{ক^{ন}}।$$

কিন্তু এস্থলেও ন **অখণ্ড ধনরাশি**।

এই দুইটি কথা একত্র করিলে দেখা যায়,

কোন রাশির শক্তিচিহ্ন

অখণ্ড ধনসংখ্যা হইলে তাহার অর্থ এই যে,

সেই রাশি সেই সংখ্যক বার উৎপাদকরূপে গৃহীত,

এবং শক্তিচিহ্ন

অখণ্ড ঋণসংখ্যা হইলে তাহার অর্থ এই যে,

তাহা সেই রাশির সেই পরিমাণ ধনচিহ্নিত শক্তির অন্যোন্যক।

এখন প্রশ্ন উঠিতে পারে,

$ক^{ন}$ এই রাশির শক্তিচিহ্ন ন
যদি অখণ্ড সংখ্যা না হইয়া কোন ভগ্নাংশ হয়,

যথা $ন = \frac{প}{ফ}$, (এ স্থলে প ও ফ উভয়েই অখণ্ড ধনসংখ্যা,)

তাহা হইলে $ক^{ন}$ এর অর্থ কি হইবে।

এরূপ স্থলে শক্তিচিহ্নের সহজ অর্থ খাটে না, কারণ, ক কে ন অর্থাৎ $\frac{প}{ফ}$ বার উৎপাদক রূপে গ্রহণ করার কোন অর্থ নাই।

দেখা যাউক শক্তিচিহ্ন সম্বন্ধীয় মূল নিয়ম, অর্থাৎ $ক^{ন} \times ক^{ম} = ক^{ন+ম}$, শক্তিচিহ্ন ভগ্নাংশ হইলেও খাটিবে এইকথা মানিয়া লইলে, $ক^{\frac{প}{ফ}}$ এর কোন অর্থ হয় কি না।

তাহা হইলে,

$$\left(ক^{\frac{প}{ফ}}\right)^{ফ} = ক^{\frac{প}{ফ}} \times ক^{\frac{প}{ফ}} \times ক^{\frac{প}{ফ}} \times$$

(ফ সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত)

$$= ক^{\frac{প}{ফ}+\frac{প}{ফ}+\frac{প}{ফ}}$$ (ফ সংখ্যক পদ পর্যন্ত)

$$= ক^{\frac{প}{ফ} \times ফ}$$

$$= ক^{প}।$$

অতএব উভয় দিকের ফ তম মূল হইলে,

$$\sqrt[ফ]{\left(ক^{\frac{প}{ফ}}\right)^{ফ}} = \sqrt[ফ]{ক^{প}}\,।$$

$$\therefore \quad \text{অর্থাৎ} \quad ক^{\frac{প}{ফ}} = \sqrt[ফ]{ক^{প}}\,।$$

সুতরাং $ক^{\frac{প}{ফ}}$ এমন একটি রাশি যাহার

ফ শক্তি $= ক^{প}$, অর্থাৎ $ক^{\frac{প}{ফ}}$ এর অর্থ এই যে

তাহা $ক^{প}$ এর ফ তম মূল।

৭৯। এখন দেখা যাউক $ক^{-\frac{প}{ফ}}$ এর অর্থ কি।

শক্তিচিহ্নের মূল নিয়ম অর্থাৎ $ক^{ন} \times ক^{ম} = ক^{ন+ম}$ যদি খাটে, তবে,

$$ক^{-\frac{প}{ফ}} \times ক^{\frac{প}{ফ}} = ক^{-\frac{প}{ফ}+\frac{প}{ফ}}$$

$$= ক^{০}$$

$$= ১ \text{ (২৭ ধারা দ্রষ্টব্য)}$$

$$\text{সুতরাং } ক^{-\frac{প}{ফ}} = \frac{১}{ক^{\frac{প}{ফ}}}\,।$$

৮০। অতএব শক্তিচিহ্ন অখণ্ড বা খণ্ড ধনরাশি বা ঋণরাশি হইলে তাহার কি অর্থ হইবে তাহা দেখা গেল, এবং আরও দেখা গেল, সেই অর্থ শক্তিচিহ্নের মূল নিয়মের সহিত সম্পূর্ণ সঙ্গতি রাখিয়া নিরূপিত হইল।

$$\text{সুতরাং } ক^{\frac{প}{ফ}} \times ক^{\frac{ব}{ভ}} = ক^{\frac{প}{ফ}+\frac{ব}{ভ}},$$

$$ক^{\frac{২}{৩}} \times ক^{\frac{৩}{৪}} = ক^{\frac{২}{৩}+\frac{৩}{৪}} = ক^{\frac{১৭}{১২}}।$$

$$স^{\frac{২}{৩}} - স^{\frac{১}{৩}} = স^{\frac{২}{৩}-\frac{১}{৩}} = স^{\frac{১}{৩}},$$

$$স^{\frac{১}{ম}} \div স^{\frac{১}{ন}} = স^{\frac{১}{ম}-\frac{১}{ন}} = স^{\frac{ন-ম}{নম}}।$$

৮১। পূর্ব্বেই বলা হইয়াছে (৬৯ ধাবা দ্রষ্টব্য) সকল সংখ্যা বা বাশিব সকল মূল ঠিক নির্ণয় কবা যায় না।

যথা ৪এব বর্গমূল ঠিক নির্ণয় কবা যায়,

এবং $\sqrt{৪} = ২$।

কিন্তু ৮এব বর্গমূল ঠিক নির্ণয় করা যায় না। তাহা ২ অপেক্ষা বড় ও ৩ অপেক্ষা ছোট। এবং এমন কোন সংখ্যা নাই যাহাব বর্গ ঠিক ৮। তবে বর্গমূল আকর্ষণের প্রক্রিয়া চালাইলে ক্রমশঃ লব্ধ বর্গমূল যতদূর ইচ্ছা ৮এব প্রকৃত বর্গমূলেব সন্নিহিত হইতে পাবে। (পাটীগণিত ১৭৫ ধাবা দ্রষ্টব্য)।

আবার ৮এর ঠিক ঘনমূল নির্ণয় করা যায়,

এবং $\sqrt[৩]{৮} = ২$,

কিন্তু ৪এব ঠিক ঘনমূল নির্ণয় কবা যায় না।

ক এবং খ এব মূল্য যতই হউক,

$ক^২ + ২কখ + খ^২$ এই রাশির

বর্গমূল $ক + খ$,

কিন্তু $ক^২ + কখ$ এই বাশির

ঠিক বর্গমূল $ক = ৩$, $খ = ৯$ হইলে পাওয়া যায়,

অর্থাৎ $\sqrt{৩^২ + ৩ \times ৯} = \sqrt{৩৬} = ৬$,

এবং $ক = ৩$, $খ = ৪$, বা $ক = ৩$, $খ = ৫$ হইলে পাওয়া যায় না।

৮২। যে রাশি অপর কোন রাশির অনির্ণেয় মূল, তাহাকে **করণী** বা **অরূপ রাশি** বলে।

যথা, $\sqrt{৩}$, $\sqrt[৩]{৪}$, $\sqrt{ক^২+কখ}$, $\sqrt[৩]{স+৩শস}$, ইত্যাদি।

যে রাশি অপব কোন রাশিব নির্ণেয় মূল তাহাকে **রূপরাশি** বা **রূপ** বলে।

যথা, $\sqrt{৪}$, $\sqrt[৩]{৮}$, $\sqrt{ক^২+২কখ+খ^২}$, $\sqrt[৩]{স^৬}$, ইত্যাদি।

৮৩। (১) কোন কবণী যে মূলআত্মক তাহাবই প্রতিরূপ শক্তিতে উত্থিত করিয়া যে কোন রূপবাশিকে কবণীব আকাবে আনা যাইতে পারে।

যথা, $৩=\sqrt{৩^২}=\sqrt{৯}=\sqrt[৩]{৩^৩}=\sqrt[৩]{২৭}$,

$ক=\sqrt[৩]{ক^৩}=\sqrt[২]{ক^২}$।

(২) আবাব কোন কবণীব কোন উৎপাদক যদি প্রকৃত রূপরাশি হয় তবে করণী যে মূলআত্মক, সেই উৎপাদকেব সেই মূল আকর্ষণ কবিয়া তাহাকে রূপবাশিব আকাবে আনা যাইতে পাবে।

যথা, $\sqrt{৮}=\sqrt{৪\times২}=\sqrt{৪}\times\sqrt{২}=২\times\sqrt{২}$,

$\sqrt[৩]{৮ক}=\sqrt[৩]{৮}\times\sqrt[৩]{ক}=২\sqrt[৩]{ক}$,

$\sqrt{ক^৬স^৩}=\sqrt{ক^৬}\times\sqrt{স^৩}=ক^৩\sqrt{স^৩}$।

এই প্রকাবে কবণীচিহ্নেব বাহিবে আনীত রূপবাশি ভাগকে করণীর প্রকৃতি বলা যায়।

৮৪। **যদি দুই করণীর প্রকৃত করণীভাগ একই হয়, তবে তাহাদের যোগফল বা বিয়োগফল তাহাদের প্রকৃতির যোগফলের বা বিয়োগফলের সহিত সেই প্রকৃত করণীর গুণফল।**

যথা, $\sqrt{১৮}\pm\sqrt{৮}=\sqrt{৯\times২}\pm\sqrt{৪\times২}$

$=৩\times\sqrt{২}\pm২\times\sqrt{২}=(৩\pm২)\times\sqrt{২}$,

$\sqrt{ক^২স}\pm\sqrt{খ^২স}=ক\times\sqrt{স}\pm খ\sqrt{স}$

$=(ক\pm খ)\times\sqrt{স}$।

৮৫। যদি কোন দুইটি করণীর শক্তিচিহ্ন সমান হয়, তবে তাহাদের গুণফল বা ভাগফল করণীর অন্তর্গত রাশির গুণফল বা ভাগফলের সেই শক্তি।

যথা, $\sqrt{৮} \times \sqrt{৫} = \sqrt{৮ \times ৫} = \sqrt{৪০}$
$= ২\sqrt{১০}$,

$$\sqrt[৩]{\text{ক}^২} \times \sqrt[৩]{\text{স}^২} = \text{ক}^{\frac{২}{৩}} \times \text{স}^{\frac{২}{৩}}$$
$$= (\text{ক} \times \text{স})^{\frac{২}{৩}}$$
$$= \sqrt[৩]{\text{ক}^২\text{স}^২}।$$

$$\sqrt{১০} \div \sqrt{৬} = \sqrt{\tfrac{১০}{৬}} = \sqrt{\tfrac{৫}{৩}},$$
$$\sqrt{\text{ক}^৩} \div \sqrt{\text{স}^৩} = \sqrt{\frac{\text{ক}^৩}{\text{স}^৩}}$$
$$= \left(\frac{\text{ক}}{\text{স}}\right)^{\frac{৩}{২}}$$

৮৬। উপবে যে সকল উদাহরণ দেওয়া গিয়াছে তাহা একপদী করণীর উদাহবণ। কিন্তু কবণী দ্বিপদ বা বহুপদ হইতে পারে। বর্গমূলাত্মক দ্বিপদ কবণীব প্রয়োগ অনেক স্থলে ঘটে, এবং তাহাদের সম্বন্ধীয় প্রক্রিয়াও অপেক্ষাকৃত সহজ। সেই প্রয়োগ ও প্রক্রিয়া কএকটিব নিয়ম নিম্নে নিরূপিত হইবে।

৮৭। বর্গমূলাত্মক দ্বিপদ করণী কোন ভগ্নাংশের হর হইলে, সেই ভগ্নাংশকে রূপরাশি হব বিশিষ্ট আকাবে পরিবর্ত্তিত কবিবাব নিয়ম।

মনে কব ভগ্নাংশেব আকাব এই—

$$\frac{\text{ক}+\sqrt{\text{খ}}}{\text{গ}+\sqrt{\text{স}}}$$ । তাহা হইলে

১ $$\frac{\text{ক}+\sqrt{\text{খ}}}{\text{গ}+\sqrt{\text{স}}} = \frac{(\text{ক}+\sqrt{\text{খ}})\ (\text{গ}-\sqrt{\text{স}})}{(\text{গ}+\sqrt{\text{স}})\ (\text{গ}-\sqrt{\text{স}})}$$

$$=\frac{(ক+\sqrt{খ})\,শ-\sqrt{স}}{শ^২-স}\;।$$

৮৮। কোন রূপরাশির বর্গমূলের একাংশ রূপরাশি ও একাংশ করণী হইতে পারে না।

যদি তাহা সম্ভবপর হয়, মনে কর

$$\sqrt{ন}=ক+\sqrt{ম}\;।$$

উভয় দিকের দ্বিতীয় শক্তি লইলে,

$$ন=ক^২+২ক\sqrt{ম}+ম,$$

$$\therefore\quad ২ক\sqrt{ম}=ন-ক^২-ম,$$

$$\therefore\quad \sqrt{ম}=\frac{ন-ক^২-ম}{২ক}\;।$$

$$=\text{একটি রূপরাশি।}$$

ইহা অনুমানের বিপরীত, অর্থাৎ $\sqrt{ম}$ করণী নহে।

৮৯। যদি $ক+\sqrt{ন}=শ+\sqrt{স}$ হয় তবে $ক=শ$, ও $\sqrt{ন}=\sqrt{স}$।

যদি $ক=শ$ না হয়, মনে কর $ক=শ+অ$,

তাহা হইলে

$$শ+অ+\sqrt{ন}=শ+\sqrt{স},$$

$$\therefore\quad অ+\sqrt{ন}=\sqrt{স}\;।$$

কিন্তু ৮৮ ধারায় দর্শিত হইয়াছে তাহা হইতে পারে না।

৯০। যদি $\sqrt{(ক+\sqrt{ন})}=শ+\sqrt{স}$ হয়, তাহা হইলে $\sqrt{(ক-\sqrt{ন})}=শ-\sqrt{স}$ হইবে।

কারণ, যখন $\sqrt{(ক+\sqrt{ন})}=শ+\sqrt{স}$,

তখন উভয় দিকের দ্বিতীয় শক্তি লইলে,

$$ক+\sqrt{ন}=শ^২+স+২শ\sqrt{স}\;।$$

$\therefore$ ক $=$ শ^{২} $+$ স,

$\sqrt{\text{ন}} = ২\text{শ}\sqrt{\text{স}}$। (৮৯ ধারা দ্রষ্টব্য)

$\therefore$ ক $-\sqrt{\text{ন}} =$ শ$^{২}+$ স $- ২\text{শ}\sqrt{\text{স}}$

$= (\text{শ} - \sqrt{\text{স}})^{২}$,

$\therefore \sqrt{(\text{ক} - \sqrt{\text{ন}})} = \text{শ} - \sqrt{\text{স}}$।

উক্তপ্রকারে ইহাও সপ্রমাণ হইবে যে,

যদি $\sqrt{(\text{ক} + \sqrt{\text{ন}})} = \sqrt{\text{শ}} + \sqrt{\text{স}}$ হয়,

তবে $\sqrt{(\text{ক} - \sqrt{\text{ন}})} = \sqrt{\text{শ}} - \sqrt{\text{স}}$ হইবে।

৯১। ক $+\sqrt{\text{ন}}$ এই করণীর বর্গমূল নিরূপণের নিয়ম।

মনে কর $\sqrt{(\text{ক} + \sqrt{\text{ন}})} = \sqrt{\text{শ}} + \sqrt{\text{স}}$,

তাহা হইলে $\sqrt{(\text{ক} - \sqrt{\text{ন}})} = \sqrt{\text{শ}} - \sqrt{\text{স}}$।

(৯০ ধারা দ্রষ্টব্য)।

$\therefore$ গুণন দ্বারা $\sqrt{(\text{ক}^{২} - \text{ন})} = \text{শ} - \text{স}$।

আবার উপরের প্রথম সমীকরণের উভয় দিকের দ্বিতীয় শক্তি লইলে

ক $+\sqrt{\text{ন}}$ $= \text{শ} + \text{স} + ২\sqrt{\text{শস}}$।

$\therefore$ ক $= \text{শ} + \text{স}$ (৮৯ ধারা দ্রষ্টব্য)।

$\therefore$ শ $+$ স $=$ ক

শ $-$ স $= \sqrt{(\text{ক}^{২} - \text{ন})}$।

$\therefore$ এই দুইটি সমীকরণের যোগ বিয়োগ দ্বারা

শ $= \frac{১}{২}\{\text{ক} + \sqrt{(\text{ক}^{২} - \text{ন})}\}$,

স $= \frac{১}{২}\{\text{ক} - \sqrt{(\text{ক}^{২} - \text{ন})}\}$।

এইরূপে শ ও স জানা গেল,

সুতরাং $\sqrt{\text{শ}} + \sqrt{\text{স}}$ অর্থাৎ $\sqrt{(\text{ক} + \sqrt{\text{ন}})}$ ও জানা গেল।

৯২। পূর্ব্বে বলা হইয়াছে, (৮১ধারা দ্রষ্টব্য) সকল রাশির সকল মূল ঠিক নির্ণয় করা যায় না। তবে যতদূর ইচ্ছা মূলের সন্নিহিত সংখ্যা নির্ণয় করা যায়। যে রাশি এইরূপ অগ্ররাশির অনির্ণেয় মূল তাহাকে অরূপ বা করণী বলা গিয়াছে।

এতদ্ভিন্ন আর একপ্রকার অনির্ণেয় মূল আছে যাহা কেবল অনির্ণেয় নহে, কিন্তু একেবারে অননুমেয়। যথা $\sqrt{-অ}$। কারণ এমন কোন রাশিই নাই ও থাকিতেও পারে না, যাহার বর্গ বা দ্বিতীয় শক্তি ঋণরাশি, কেন না যে কোন রাশিই লওয়া যাউক এবং তাহা ধনরাশিই হউক বা ঋণরাশিই হউক, তাহার বর্গ বা দ্বিতীয় শক্তি অবশ্যই ধনরাশি হইবে। অতএব $\sqrt{-অ}$ এই আকারের রাশিকে **ভাবনিক** বা **কাল্পনিক** রাশি বলা যায়।

$$\sqrt{-অ} = \sqrt{(-১)\times অ} = \sqrt{-১} \times \sqrt{অ},$$

এবং $\sqrt{অ}$ রূপরাশি অথবা অরূপরাশি হইতে পারে, কিন্তু তাহা প্রকৃত রাশি বটে। অতএব যে কোন ভাবনিক বা কাল্পনিক রাশিকে

$\sqrt{-১} \times$ কোন প্রকৃত রূপ বা অরূপ রাশি

এই আকারে প্রকাশ করা যাইতে পারে।

এবং $\sqrt{-১}$ এই একমাত্র ভাবনিক রাশি লইয়া ভাবনিক রাশি সম্বন্ধীয় প্রক্রিয়া চালান যাইতে পারে। আর $\sqrt{-১}$ এর পরিবর্ত্তে 'ভ' এই অক্ষর ব্যবহার করা যাইতে পারে।

৯৩। এই স্থানে প্রশ্ন উঠিতে পারে, যখন দেখা যাইতেছে $\sqrt{-অ}$ বা $\sqrt{-১} \times \sqrt{অ}$ কোন অনুমেয় রাশি নহে, একবারে ভাবনিক বা কাল্পনিক রাশি, তখন এ প্রকার রাশির উৎপত্তি কোথা হইতে, এবং ইহার অর্থ ও প্রয়োজনই বা কি?

এই প্রশ্নের উত্তর সরল বীজগণিতে দেওয়া তত সহজ নহে। শিক্ষার্থী উচ্চগণিত অধ্যয়নে ইহার উত্তর ক্রমশঃ পাইবে। এস্থলে ইহার উত্তরে সঙ্ক্ষেপে যাহা বলা যাইতে পারে তাহা নিম্নে লিখিত হইল।

যদি $স^{২} + ১ = ০$,

এইরূপ একটি সমীকরণ থাকে, তবে তাহাতে অব্যক্ত রাশি স এর মান কত জানিতে হইলে, দেখা যাইতেছে

$$স^{২} = -১,$$

সুতরাং $স = \sqrt{-১}$।

এই প্রকারে $\sqrt{-১}$ বা ভ ইহার উৎপত্তি।

পূর্ব্বেই বলা গিয়াছে, ইহা কোন প্রকৃত রাশি হইতে পারে না। এক্ষণে দেখা যাউক ইহার অর্থ কি।

গুণনের নিয়মানুসারে $\sqrt{-১} \times \sqrt{-১} = -১$,

$$\sqrt{-১} \times \sqrt{-১} \times \sqrt{-১} = -\sqrt{-১},$$

$$\sqrt{-১} \times \sqrt{-১} \times \sqrt{-১} \times \sqrt{-১} = ১।$$

সুতরাং $অ \times (\sqrt{-১})^{২} = -অ$,

$$অ \times (\sqrt{-১})^{৩} = -অ \times \sqrt{-১},$$

$$অ \times (\sqrt{-১})^{৪} = অ।$$

অতএব কোন রাশি অ কে $\sqrt{-১}$ দিয়া ক্রমশঃ

দুই বার গুণ করিলে তাহার ফল $= -অ$,

তিন বার গুণ করিলে তাহার ফল $= -অ \times \sqrt{-১}$,

চারি বার গুণ করিলে তাহার ফল $= অ$।

পূর্ব্বে বলা হইয়াছে (১৪ ধারা দ্রষ্টব্য)—

একদিকে অর্থাৎ দক্ষিণ দিকে কোন বিন্দুর দূরত্বের পরিমাণ যদি অ হয়, তাহা হইলে তাহার বিপরীত দিকে অর্থাৎ বাম দিকে ঠিক ততদূরস্থিত বিন্দুর দূরত্ব—অ দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে। এখন দেখা যাইতেছে, $\sqrt{-১}$ দ্বারা গুণন এমন একটি প্রক্রিয়া যে, তাহার ক্রমশঃ দুইবার প্রয়োগ দ্বারা কোন একটি রাশির ধনচিহ্ন ঋণচিহ্ন হয়, অর্থাৎ চিহ্ন বিপরীত হয়, তিনবার প্রয়োগ দ্বারা একবার প্রয়োগের বিপরীত ফল হয়, এবং চারিবার প্রয়োগ দ্বারা পুনরায় সেই রাশিই পাওয়া যায়।

এবং সেই রাশি যদি একটি সরল রেখার দৈর্ঘ্যের পরিমাণ হয়, তবে এ প্রক্রিয়ার দুইবার প্রয়োগে সেই রেখা বা দৈর্ঘ্য এক দিক হইতে ঠিক তাহার বিপরীত দিকে গিয়া পড়ে, অর্থাৎ দুই সমকোণ ঘুরিয়া যায়। আর $\sqrt{-১}$ দিয়া ক্রমশঃ দুইবার গুণনের ফল যদি এই হইল, তাহা হইলে একবার গুণনের ফল সেই রেখাকে এক সমকোণ ঘুরাইয়া লওয়া, ইহা বলা যাইতে পারে।

যথা, মনে কর পার্শ্বের চিত্রে

$ওক = অ$,

$ওক_২ = -অ$।

তাহা হইলে

$ওক_১ = \sqrt{-১} \times অ$।

কারণ $ওক \times \sqrt{-১} \times \sqrt{-১} = -ওক = ওক_২$,

অতএব $ওক \times \sqrt{-১} = ওক_১$ একথা বলা যাইতে পারে।

সুতরাং $\sqrt{-১}$ দ্বারা গুণন এমন একটি প্রক্রিয়া যদ্দ্বারা ওক স্বস্থান হইতে $ওক_১$ এই স্থানে আইসে। এবং $অ \times (\sqrt{-১})^৩ = অ \times -\sqrt{-১}$
$= -ওক\sqrt{-১} = ওক_৩$।

অতএব, যেমন—চিহ্ন কোন রেখার বিপরীত দিকে পরিবর্ত্তনের, অর্থাৎ দুই সমকোণ ঘূর্ণনের, প্রক্রিয়ার চিহ্ন, সেইরূপ $\sqrt{-১}$ দ্বারা গুণন তাহার এক সমকোণ ঘূর্ণনের প্রক্রিয়ার চিহ্ন বলা সঙ্গত বটে।

ভাবনিক রাশি $\sqrt{-১}$ বা ভ সম্বন্ধে সমীকরণের অধ্যায়ে আরও কিছু বলা যাইবে।

৬। উদাহরণমালা।

১। নিম্নলিখিত রাশিগুলির মূল্য নিরূপণ কর অথবা তাহাদিগকে সরল আকারে আন।—

(১) $৮^{\frac{২}{৩}}$। (২) $১৬^{-\frac{৩}{৪}}$। (৩) $\left(২\frac{৩}{৮}\right)^{\frac{২}{৩}}$।

(৪) $\frac{৩স}{২}\sqrt{\frac{৪০০য^২}{৮১স^২}}$। (৫) $\left(ক^২খ^{-\frac{৪}{৩}}\right)^{-\frac{৩}{২}}$।

২। নিম্নের গুণফল ও ভাগফল নির্ণয় কর।

(১) $(স - স^{\frac{১}{২}}য^{\frac{১}{২}} + য) \times (স^{\frac{১}{২}} - য^{\frac{১}{২}})$।

(২) $(স^২ + ১ + স^{-২}) \times (স^২ - ১ + স^{-২})$।

(৩) $(স^{\frac{২}{৩}} + ক^{\frac{২}{৩}})(স^{\frac{২}{৩}} - ক^{\frac{২}{৩}}) \div (স^{\frac{১}{৩}} + ক^{\frac{১}{৩}})$।

(৪) $(ক^{\frac{৪}{৩}} + ২ + ক^{-\frac{৪}{৩}}) \div (ক^{\frac{২}{৩}} + ক^{-\frac{২}{৩}})$।

৩। নিম্নলিখিত বাশিগুলিকে সরল আকাবে আন।—

(১) $\sqrt{১৮} + \frac{৮}{\sqrt{২}} + \frac{\sqrt{২৪}}{৩\sqrt{৩}}$।

(২) $\frac{১}{\sqrt{৫} - ১} - \frac{১}{\sqrt{৫} + ১}$।

(৩) $\frac{ক\sqrt{খগ} - কখ}{কখ - ক\sqrt{খগ}}$।

(৪) $\frac{\sqrt{১+স} - \sqrt{১-স}}{\sqrt{১+স} + \sqrt{১-স}}$।

৪। নিম্নলিখিত করণীগুলির বর্গমূল নির্ণয় কর।

(১) $৩ + ২\sqrt{২}$। (২) $২ - \sqrt{৩}$।

(৩) $৩ - \sqrt{৫}$। (৪) $৬ - ২\sqrt{৫}$।

৫। নিম্নলিখিত ভাবনিক রাশির মূল্য নির্ণয় কব।

(১) $\left(\frac{-১ + \sqrt{-৩}}{২}\right)^২$। (২) $\left(\frac{-১ + \sqrt{-৩}}{২}\right)^৩$।

সপ্তম অধ্যায়।

সমীকরণ।

উপক্রমণিকা।

৯৪। সমীকরণ বীজগণিতের একটি প্রধান বিষয়। এবং সমীকরণ ক্রিয়া প্রয়োগ দ্বারা অনেক জটিল প্রশ্নের সমাধান হইয়া থাকে।

সমীকরণে অব্যক্ত অর্থাৎ নির্ণেয় রাশি সাধারণতঃ বর্ণমালার শেষভাগের অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা গিয়া থাকে। এই পুস্তকে তাহা *স, শ, ষ* ইত্যাদি অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা যাইবে।

৯৫। সমীকরণ নানাবিধ।

যে সমীকরণে একটি মাত্র অব্যক্ত রাশির প্রথম শক্তি মাত্র থাকে, তাহাকে **একবর্ণ সরল** সমীকরণ বলে।

যথা ৪ স $-$ ৩ $=$ ২স $+$ ১।

যে সমীকরণে একাধিক অব্যক্ত রাশির প্রথম শক্তি মাত্র থাকে তাহাকে **অনেকবর্ণ সরল** সমীকরণ বলে।

যথা, $\left.\begin{array}{l}\text{স} + ২\,\text{ষ} = ৫ \\ ৩\text{স} - \text{ষ} = ১\end{array}\right\}$

যে সমীকরণে একটি মাত্র অব্যক্ত রাশির দ্বিতীয় শক্তি মাত্র থাকে তাহাকে **বিশুদ্ধ দ্বিশক্তি** সমীকরণ বলে।

যথা ৩স^{২} $+$ ২ $=$ স^{২} $+$ ৪।

যাহাতে একমাত্র অব্যক্ত রাশি থাকে, কিন্তু তাহার প্রথম ও দ্বিতীয় উভয় শক্তিই থাকে, তাহাকে **মিশ্র দ্বিশক্তি** সমীকরণ বলে।

যথা ২স^{২} $+$ ৩স $+$ ৪ $=$ ১৮।

আর এই দ্বিবিধ সমীকরণকেই সংক্ষেপে **দ্বিশক্তি** সমীকরণ বলে। এবং তাহাতে যদি একাধিক অব্যক্ত রাশি থাকে, তবে তাহাকে **অনেক বর্ণ দ্বিশক্তি** সমীকরণ বলে।

যথা $স^২ + ষ^২ = ৫$,

$সষ \quad = ২$।

যে সমীকরণে অব্যক্ত রাশির তৃতীয়, চতুর্থ, ইত্যাদি শক্তি থাকে তাহাকে **ত্রিশক্তি, চতুঃশক্তি,** ইত্যাদি সমীকরণ বলে।

৯৬। অব্যক্ত রাশির যে মূল্যে বা যে যে মূল্যে সমীকরণের সাম্য বজায় থাকে, সেই মূল্যকে বা সেই সেই মূল্যকে সমীকরণের **মান** বলে।

যথা $স + ৩ = ৭$,

এই সমীকরণে $স = ৭ - ৩ = ৪$ হইলেই সাম্য বজায় থাকে,

এবং $স^২ + ৩ = ১২$,

এই সমীকরণে $স^২ = ১২ - ৩ = ৯$,

$স \; = +৩$ বা -৩ হইলেই

সাম্য বজায় থাকে,

অতএব প্রথম সমীকরণের মান ৪,

ও দ্বিতীয় " " $+৩$ এবং -৩।

৯৭। সমীকরণ সম্বন্ধীয় দুইটি স্বতঃসিদ্ধ কথা পূর্ব্বেই বলা হইয়াছে (৫ ধারা দ্রষ্টব্য)।

সেই কথা দুইটি এই—

(১) কোন সমীকরণের উভয়দিকে বা পক্ষে কোন একই রাশি যোগ করিলে বা উভয় পক্ষ হইতে কোন একই রাশি বিয়োগ করিলে সাম্য ঠিক থাকে।

(২) কোন সমীকরণের উভয়পক্ষ একই রাশি দিয়া গুণ বা ভাগ করিলে সাম্য ঠিক থাকে।

যথা, যদি $২স+৩=৭$,
তাহা হইলে $২স+৩-৩ = ৭-৩$
এবং $(২স+৩)\times ৪ = ৭\times ৪$।

প্রথমোক্ত কথাটি নিম্নলিখিতরূপেও বলা যাইতে পারে—

কোন সমীকরণে এক দিকের যে কোন পদ তাহার ধনচিহ্ন বা ঋণচিহ্ন বিপরীত-রূপে পরিবর্তিত করিয়া অপর দিকে লইয়া গেলে সাম্য ঠিক থাকে।

যথা, যদি $কস+খ = গস+ঘ$,
তাহা হইলে $কস-গস = ঘ-খ$।
কারণ $কস+খ-খ-গস = গস+ঘ-খ-গস$,
অর্থাৎ $কস-গস = ঘ-খ$।

সমীকরণে পদের এইপ্রকার দিক বা পক্ষ পরিবর্তনকে **সমশোধন** বা **পক্ষনয়ন** বা **পার্শ্ব পরিবর্তন** বলে।

দ্বিতীয়োক্ত কথা অনুসারে অনেকস্থলে সমীকরণের আকার সরল করা যায়।

যথা, যদি $\frac{২}{৩}স+\frac{৩স-২}{৪}=২\frac{১}{৩}$,
তাহা হইলে উভয় পক্ষ ১২ দিয়া গুণ করিলে,
$৮স+৯স-৬=২৮$।

৯৮। একবর্ণ সরল সমীকরণ, অনেকবর্ণ সরল সমীকরণ, একবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণ, ও অনেকবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণ, এই অধ্যায়ের চারি পরিচ্ছেদে পৃথক্‌ভাবে আলোচিত হইবে। অব্যক্ত রাশি দুই অপেক্ষা উচ্চতর শক্তিবিশিষ্ট হইলে সমীকরণের মাননির্ণয় তত সহজ নহে, এবং সে প্রকার সমীকরণ এই সরল বীজগণিতে আলোচিত হইবে না।

প্রথম পরিচ্ছেদ।

একবর্ণ সরল সমীকরণ।

৯৯। একবর্ণ সরল সমীকরণ সমাধানের নিয়ম।

আবশ্যকমত গুণন বা ভাগদ্বারা উভয়পক্ষকে সরল আকাবে আনিয়া, সমশোধন প্রক্রিয়াদ্বাবা অব্যক্ত বাশিগুলি একদিকে ও ব্যক্ত বাশিগুলি অপর দিকে একত্র করিয়া, অব্যক্ত বাশিসমষ্টির প্রকৃতিব দ্বারা ব্যক্ত বাশির সমষ্টিকে ভাগ কবিলে, সেই ভাগফল সমীকবণেব মান অর্থাৎ অব্যক্ত বাশির পবিমাণ হইবে।

এই নিয়মেব হেতু নিম্নেব উদাহরণদ্বয় দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

(১) উদাহবণ।

$$কস + খ = গস + ঘ,$$

এই সমীকবণের মান নির্ণয় কর।

সমশোধন দ্বারা দেখা যাইতেছে,

$$কস - গস = ঘ - খ,$$

বা $(ক - গ)স = ঘ - খ,$

$$\therefore \quad স = \frac{ঘ - খ}{ক - গ}।$$

(২) উদাহরণ।

$$\frac{২}{৩}স - \frac{৩}{৪} = \frac{১}{৪}স + ১\frac{১}{৩},$$

ইহার মান নির্ণয় কর।

প্রথমে ১২দিয়া উভয় পক্ষগুণ করিয়া,

$$৮স - ৯ = ৩স + ১৬।$$

তদনন্তর সমশোধনের দ্বাবা

$$৮স - ৩স - ১৬ + ৯,$$

বা $৫স = ২৫,$

$$\therefore \quad স = \frac{২৫}{৫} - ৫।$$

১০০। একবর্ণ সরল সমীকরণের একটি ও কেবল একটিমাত্র মান থাকে।

একবর্ণ সরল সমীকরণ আবশ্যকমত গুণন ও ভাগ ও সমশোধন দ্বারা সর্ব্বত্রই

$$কস=খ$$

এই আকারে আনা যায়।

অতএব $স=\frac{খ}{ক}$ ।

সুতরাং $\frac{খ}{ক}$ এই সমীকরণেব একটি মান।

মনে কর $\frac{খ}{ক}=ম$,

এবং মনে কব $ম'$ ইহাব আর একটি মান।

তাহা হইলে $কম=খ$,

$কম'=খ$ ।

∴ বিভাগ দ্বারা $\frac{ম}{ম'}=\frac{খ}{খ}=১$,

∴ $ম=ম'$,

অঅতএব ম এবং ম' বিভিন্ন নহে।

১০১। একবর্ণ সরল সমীকবণ সমাধান প্রক্রিয়া দ্বারা অনেক জটিল প্রশ্নের সমাধান হয়।

প্রশ্ন নানাবিধ হইতে পাবে, এবং তাহাব সমাধানার্থে নানাবিধ প্রক্রিয়া প্রয়োগ ও কৌশল অবলম্বন করিতে হয়। তৎসম্বন্ধে কোন সাধাবণ নিয়ম নির্দ্দিষ্ট হইতে পারে না। সে সকল প্রক্রিয়া ও কৌশল অভ্যাস দ্বারা বিদ্যার্থীকে শিখিতে হইবে। সাধাবণ রূপে কেবল এই মাত্র বলা যাইতে পারে,—

মনে কর অব্যক্ত অর্থাৎ নির্ণেয় রাশির মূল্য স, এবং প্রশ্নানুসারে ব্যক্ত রাশিদিগের সহিত স এর যেরূপ সম্বন্ধ আছে তাহা বীজগণিতের ভাষায়, অর্থাৎ যোগবিয়োগাদি চিহ্নযুক্ত করিয়া, রাশিমালার আকারে লিখ। তাহাতে যে সমীকরণ লিপিবদ্ধ হইবে তাহার মানই স এর মূল্য।

এই কথাগুলি নিম্নের উদাহরণত্রয় দৃষ্টে স্পষ্ট রূপে বুঝা যাইবে।

(১) উদাহরণ। দুইটি সংখ্যার যোগফল ৩০ এবং বিয়োগফল ২০। সংখ্যা দুইটি নির্ণয় কর।

মনে কর ছোট সংখ্যা = স,
তাহা হইলে প্রশ্নানুসারে বড়সংখ্যা = ৩০ − স,
এবং (৩০ − স) − স = ২০।
∴ ৩০ − ২স = ২০,
∴ ২স = ৩০ − ২০ = ১০,
∴ স = ১০ ÷ ২
= ৫,
এবং অপর সংখ্যা = ৩০ − ৫ = ২৫।

(২) উদাহরণ। কোন ব্যক্তির বর্ত্তমান বয়সের দ্বিগুণ হইতে, ৬ বৎসর পূর্ব্বে তাহার যে বয়স ছিল তাহার তিনগুণ বাদদিলে, বিয়োগফল ঠিক তাহার বর্ত্তমান বয়সের পরিমাণ হইবে। তাহার বর্ত্তমান বয়স কত?

মনে কর বর্ত্তমান বয়স = স,
তাহা হইলে ৬ বৎসর পূর্ব্বের বয়স = স − ৬,
এবং প্রশ্নানুসারে ২স − ৩ (স − ৬) = স।
∴ ২স = ১৮,
∴ স = ৯।

(৩) উদাহরণ। দুই জন পথিক $প_1$ ও $প_2$ একদিকে এক পথে ঘণ্টায় $ম_1$ মাইল ও $ম_2$ মাইল হিসাবে চলিতেছে। $প_1$ যখন $ক_1$ নামক স্থানে উপনীত হয়, তাহার ঘ ঘণ্টা পরে $ক_2$ নামক স্থানে $প_2$ উপনীত হয়। $ক_1$ $ক_2$ এর ব্যবধান ব মাইল। $ক_2$ স্থানে $প_2$ উপনীত হইবার কতক্ষণ পরে $প_1$ তাহার সহিত মিলিত হইবে? এবং $ক_2$ হইতে কত দূরে?

মনে কর $ক_2$ এতে $প_2$ উপনীত হইবার স ঘণ্টা পরে $প_1$ তাহার সহিত মিলিত হয়।

$$ক_1 \qquad ক_2 \qquad ক_3$$

এবং মনে কর অঙ্কিত রেখার $ক_3$ চিহ্নিত স্থানে তাহারা মিলিত হয়। তাহা হইলে প্রশ্নানুসারে,

$$ক_1 ব_3 - সম_2 ,$$

$$ক_1 ক_3 = (ঘ+স)\, ম_1$$

এবং $$ক_1 ক_3 = ক_1 ক_2 + ক_2 ক_3$$

অর্থাৎ $(ঘ+স)\, ম_1 = ব + সম_2$।

$$স\,(ম_1 - ম_2) = ব - ঘম_1 ,$$

$$স = \frac{ব - ঘম_1}{ম_1 - ম_2} ।$$

এবং $$ক_2 ক_3 = সম_2 = \frac{ম_2\,(ব - ঘম_1)}{ম_1 - ম_2} ।$$

এক্ষণে দেখা যাউক ভিন্ন ভিন্ন স্থলে স এর এই মূল্যের অর্থ কিরূপ হয়।

প্রথমতঃ মনে কর $ম_1 > ম_2$, এবং $ব > ঘম_1$।

তাহা হইলে স এবং $ক_2$ $ক_3$ উভয়ই ধনরাশি, এবং $প_2$ যখন $ক_2$ চিহ্নিত স্থানে আইসে তাহার **পরে** $প_1$ তাহার সহিত মিলিত হইবে। আর তাহাই হওয়া অবশ্যম্ভাবী।

কারণ, ব অর্থাৎ $ক_১ ক_২ > ঘম_১$

সুতবাং $প_২$, $ক_২$তে আসিবাব সময় $প_১$ অবশ্যই $ক_১$ ও $ক_২$ এব মধ্যে কোন এক স্থানে ছিল, অর্থাৎ $প_১$ এব **পশ্চাতে** ছিল। এবং $ম_১ > ম_২$ অর্থাৎ $প_১$ যখন $প_২$ অপেক্ষা দ্রুত চলিতেছে, তখন $প_১$ কিঞ্চিৎ **পরে** অবশ্যই $প_২$ এর সহিত মিলিবে। এবং সেই মিলনেব স্থানেব $ক_২$ হইতে দূরত্ব অর্থাৎ

$$ক_১ ক_৩ = \frac{ম_২(ব - ঘম_১)}{ম_১ - ম_২}$$

একটি ধনরাশি, অর্থাৎ $ক_৩$ স্থান $ক_২$ স্থানেব **দক্ষিণেই** হইবে।

দ্বিতীয়তঃ মনে কর $ম_১ > ম_২$ কিন্তু $ব < ঘম_১$।

তাহা হইলে স ও $ক_২ ক_৩$ উভয়ই ঋণবাশি,

এবং $প_২$ যখন $ক_২$ চিহ্নিতস্থানে আইসে তাহার **পূর্ব্বে** $প_১$ এব সহিত তাহাব মিলন হইয়াছিল, এবং মিলনেব স্থান $ক_৩$, $ক_২$ স্থানেব **বামে**। আব তাহাই হওয়া অবশ্যম্ভাবী।

কাবণ, $ব < ঘম_১$, সুতবাং $প_২$ যখন $ক_২$ স্থানে আইসে তাহাব ঘ ঘণ্টা পবে $প_১$ অবশ্যই $ক_১$ স্থান ছাড়াইয়া গিয়াছে, অর্থাৎ $প_২$ এব **অগ্রে** গিয়া পড়িয়াছে। এবং $ম_১ > ম_২$, অর্থাৎ $প_১$ যখন $প_২$ অপেক্ষা দ্রুত যাইতেছে, তখন $প_১$ আব তাহাব সঙ্গে মিলিতে পাবিবে না। অতএব প্রশ্নটি এ স্থলে এইভাবে লইতে হইবে,

যথা—"$ক_২$ স্থানে $প_২$ আসিবাব কতক্ষণ পূর্ব্বে ও কোন স্থানে $প_১$এর সহিত তাহাব মিলন হইয়াছিল?"

$ক_১$ $ক_৩$ $ক_২$

মনে কব স ঘণ্টা পূর্ব্বে, ও অঙ্কিত বেখাব $ক_৩$ স্থানে, পথিকদ্বয়েব মিলন হইয়াছিল।

তাহা হইলে

$$ক_৩ ক_২ = সম_২,$$

$$ক_১ ক_৩ = (ঘ - স)ম_১,$$

এবং $$ক_১ ক_৩ = ক_১ ক_২ - ক_২ ক_৩,$$

অর্থাৎ $(ঘ-স)ম_১ = ব-সম_২$ ।

$\therefore\ স(ম_১-ম_২) = ঘম_১-ব,$

$$\therefore\quad স = \frac{ঘম_১-ব}{ম_১-ম_২}$$

$$এবং\ ক_২ক_৩ = সম_২ = \frac{ম_২(ঘম_১-ব)}{ম_১-ম_২}\ ।$$

ঋণবাশির এইরূপ অর্থ, পূর্ব্বে ১৪ধারায় যাহা বলা হইয়াছে সেই কথার সহিত সম্পূর্ণ সঙ্গত বলিয়া দেখা যাইতেছে। অর্থাৎ কালের পরিমাপে ধনবাশি যদি **পরবর্ত্তী** কাল বুঝায়, ঋণবাশি **পূর্ব্ববর্ত্তী** কাল বুঝাইবে, এবং দৈর্ঘ্যের পরিমাপে, ধনবাশি যদি **দক্ষিণে** দৈর্ঘ্য বুঝায়, ঋণবাশি **বামে** দৈর্ঘ্য বুঝাইবে।

তৃতীয়তঃ মনে কর $ম_১ < ম_২$ এবং $ব < ঘম_১$ ।

তাহা হইলে $ব-ঘম_১$ এবং $ম_১-ম_২$ উভয়ই ঋণবাশি হওয়াতে স ও $ক_২ক_৩$ উভয়ই ধনবাশি হইতেছে, এবং $প_২$, $ক_২$ স্থানে আসিবার পর $ক_২$ স্থানের দক্ষিণে $প_১$ এর সঙ্গে মিলিবে। আর তাহাই হওয়া অবশ্যম্ভাবী।

কারণ, ব অর্থাৎ $ক_১ক_২ < ঘম_১$, সুতরাং $প_১$ যখন $ক_১$ স্থানে আইসে তাহার ঘ ঘণ্টা পরে $প_১$ অবশ্যই $ক_২$ ছাড়াইয়া গিয়াছে, অর্থাৎ, $প_২$ এর অগ্রে গিয়াছে। এবং $ম_১ < ম_২$, অর্থাৎ $প_২$ যখন $প_১$ অপেক্ষা দ্রুত যাইতেছে, তখন কিঞ্চিৎ পরে $প_২$ অবশ্যই $প_১$ এর সহিত মিলিবে। আর সেই মিলনের স্থান অবশ্যই $ক_২$ এর দক্ষিণে হইবে।

চতুর্থতঃ মনে কর $ম_১ = ম_২$, কিন্তু $ব > ঘম_১$ ।

তাহা হইলে $স = \frac{ব-ঘম_১}{0} = \infty$ (পাটীগণিতের ৪৬ ধারা দ্রষ্টব্য)।

ইহার অর্থ এই যে $প_১$ ও $প_২$ কখনই মিলিবে না।
আর তাহাই অবশ্যম্ভাবী।

কারণ, ব অর্থাৎ $ক_১ক_২ > ঘম_১$, সুতরাং $প_২$, $ক_২$ তে আসিবার সময় $প_১$ অবশ্যই $ক_১$ ও $ক_২$ এর মধ্যে কোন একস্থানে ছিল। এবং $ম_১ = ম_২$, সুতরাং $প_১$ ও $প_২$ সমান বেগে চলিতেছে। অতএব কেহই অপরকে ধরিতে পারিবে না। এবং $স = \infty$
এই কথা এই ভাবে বলিতেছে যে "অনন্ত কাল পরে উভয়ে মিলিবে।"

সর্ব্বশেষে, মনে কর $ম_১ = ম_২$, $ব = ঘম_১$। তাহা হইলে $স = \frac{০}{০}$। এখন দেখা যাউক স এর মূল্য এই আকার ধারণ করার অর্থ কি।

$ব = ঘম$, সুতরাং $প_২$ যখন $ক_২$ এতে আসিয়াছে, অর্থাৎ $প_১$ যখন $ক_১$ এতে আসিয়াছিল তাহার ঘ ঘণ্টা পরে, $প_১$ ও $ক_২$ এতে আসিয়াছে; অতএব $প_১$ ও $প_২$, $ক_২$ এতে মিলিয়াছে। এবং $ম_১ = ম_২$, অতএব উভয়ে সমান বেগে চলিতেছে, এবং সর্ব্বদাই মিলিত থাকিবে। সুতরাং

স এর কোন নির্দ্দিষ্ট মূল্য নাই, যে কোন মূল্য দিলেই চলিবে।

অতএব $\frac{০}{০}$ এই আকার স ধারণ করার অর্থ এই যে তাহার কোন নির্দ্দিষ্ট মূল্য নাই।

এই উদাহরণটি বিশেষ শিক্ষাপ্রদ, এবং উপরে যে কথাগুলি বলা হইল, শিক্ষার্থীর তাহা ভালরূপে বুঝা ও মনে রাখা কর্ত্তব্য।

১০২। উপরের (৩) উদাহরণের চতুর্থ ও শেষ কথা সাধারণ ভাবে নিম্নলিখিতরূপে দেখিলে আরও স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

একবর্ণ সরল সমীকরণের সাধারণ আকার এই—

$$কস = খ।$$

$$\therefore \quad স = \frac{খ}{ক}।$$

যদি $ক = ০$।

তবে $স = \frac{খ}{০} = \infty$।

কারণ ০ কে কোন সসীম রাশি দ্বারা গুণ করিলে গুণফল ০ ভিন্ন আর কিছু হয় না।

যদি $ক = ০$, $খ = ০$,

তাহা হইলে $০ \times স = ০$।

ও $স = \frac{০}{০}$।

অর্থাৎ সএর কোন নির্দ্দিষ্ট মান নাই, কারণ, স যাহাই হউক $০ \times স = ০$ হইবে।

দ্বিতীয় পরিচ্ছেদ।

একাধিক বর্ণ সরল সমীকরণ।

১০৩। পূর্ব্বে (১০০ ধারায়) বলা হইয়াছে একবর্ণ সরল সমীকরণের একটি ও কেবল একটি মাত্র মান থাকে।

একাধিকবর্ণ সরল সমীকরণ যদি একটি থাকে তাহা হইলে তাহার অব্যক্ত রাশিগণের প্রত্যেকের অনেক মান থাকিতে পারে।

যথা মনে কর

কস + খয = গ,

দ্বিবর্ণ এই একটি মাত্র সমীকরণ আছে।

ইহাতে যএর যে কোন মান ম নির্দ্দেশ করিলে সমীকরণ এই আকার ধারণ করিবে—

কস + খম = গ।

এবং এই শেষোক্ত সমীকরণ হইতে স এর একটি মান নিরূপিত হইবে।

এইরূপে যএর যে কোন মান নির্দ্দেশ করিয়া তদনুযায়ী সএর এক একটি মান পাওয়া যাইবে।

কিন্তু যদি দুইটি অব্যক্ত রাশিযুক্ত দুইটি সমীকরণ একসঙ্গে থাকে,

যথা, $ক_১ স + খ_১ য = গ_১$ (১)

$ক_২ স + খ_২ য = গ_২$ (২)

তাহা হইলে দেখা যাইবে,

ঐরূপ ঘটিতে পারে না, এবং প্রত্যেক অব্যক্ত রাশির সাধারণতঃ একটি নির্দ্দিষ্ট মান থাকিবে।

এইরূপ একত্র স্থিত দুইটি বা ততোধিক সমীকরণকে **সমসাময়িক** বা **সমবর্ত্তী** সমীকরণ বলে।

১০৪। সমসাময়িক সরল সমীকরণের মান নির্ণয়ের তিনটি প্রণালী আছে। কিন্তু তাহারা মূলে একই, ও প্রত্যেকের উদ্দেশ্য বিয়োগ বা বিভাগ দ্বারা অপর অব্যক্ত রাশিগুলিকে **অপনীত** করিয়া একটি অব্যক্ত রাশিবিশিষ্ট একটি সমীকরণে উপনীত হওয়া।

১৫৫। (১) দ্বিবর্ণ সমসাময়িক সরল সমীকরণের মান নির্ণয়ের **প্রথম প্রণালী**।

মনে কর $ক_১ স + খ_১ য = গ_১$; .. . (১)

$ক_২ স + খ_২ য = গ_২$ . . (২)

এই দুইটি সমীকরণ আছে।

প্রথমটিকে $খ_২$ দিয়া ও দ্বিতীয়টিকে $খ_১$ দিয়া গুণ করিলে

$ক_১ খ_২ স + খ_১ খ_২ য = খ_২ গ_১$ .. (৩)

$ক_২ খ_১ স + খ_১ খ_২ য = খ_১ গ_২$ . . . (৪)

এক্ষণে (৩) হইতে (৪) বাদ দিলে য অপসৃত হইবে,

এবং $(ক_১ খ_২ - ক_২ খ_১) স = খ_২ গ_১ - খ_১ গ_২$ .. (৫)

$$\therefore \quad স = \frac{খ_২ গ_১ - খ_১ গ_২}{ক_১ খ_২ - ক_২ খ_১}।$$

এবং এইরূপে (১) কে $ক_২$ দিয়া ও (২) কে $ক_১$ দিয়া গুণ করিয়া প্রথম গুণফলকে দ্বিতীয় গুণফল হইতে বাদ দিয়া দেখা যায়

$$য = \frac{ক_১ গ_২ - ক_২ গ_১}{ক_১ খ_২ - ক_২ খ_১}।$$

এই প্রণালী প্রয়োগের একটি সহজ উদাহরণ দেওয়া যাউক।

$স + ২য = ৫$ ... .. (১)

$২স + ৩য = ৮$ ... ... (২)

(১) কে ২ দিয়া গুণ করিয়া সেই গুণফল হইতে

(২) বাদ দিলে

$$য = ২,$$

এবং য এর স্থলে ২ সংস্থাপন দ্বারা (১) হইতে

$$স + ৪ = ৫,$$

$$\therefore \quad স = ৫ - ৪ = ১।$$

(২) **দ্বিতীয় প্রণালী**। সমীকরণদ্বয়ের কোন একটি হইতে একটি অব্যক্ত রাশির মান, অপর অব্যক্ত রাশিটিকে ব্যক্ত রাশি মনে করিয়া,

নির্ণয় কব, এবং সেই মান অপর সমীকরণে সেই বাশির স্থানে সংস্থাপিত কব। তাহা হইলে এক অব্যক্ত রাশিবিশিষ্ট একটি সমীকরণ পাইবে, এবং তাহা হইতে সেই বাশির মান নিরূপিত হইবে। তদনন্তব সেই মান সমীকরণদ্বয়ের যে কোনটিতে সেই রাশির স্থলে সংস্থাপিত করিয়া অপব অব্যক্ত বাশির মান নিরূপিত হইবে।

উদাহরণ।

$$৩স + ২য = ১২ \quad \ldots \quad (১)$$

$$২স + ৩য = ১৩ \quad (২)$$

(১) হইতে $$য = \frac{১২ - ৩স}{২}$$

$$\therefore (২) \text{ হইতে } ২স + ৩ \times \frac{১২ - ৩স}{২} = ১৩,$$

$$\therefore ৪স + ৩৬ - ৯স = ২৬,$$

$$\therefore ৫স = ১০,$$

$$\therefore স = ২।$$

$$\therefore (১) \text{ হইতে } ৬ + ২য = ১২,$$

$$\therefore ২য = ৬,$$

$$\therefore য = ৩।$$

(৩) তৃতীয় প্রণালী।

অব্যক্ত রাশিব মধ্যে কোন একটির মান অপর অব্যক্ত রাশিকে ব্যক্ত মনে করিয়া উভয় সমীকরণ হইতে নির্ণয় করিয়া, সেই দুইটি মানকে সমান বলিয়া লিখিলে, শেষোক্ত অব্যক্ত রাশি-বিশিষ্ট একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে। এবং তাহা হইতে সেই অব্যক্ত বাশির মান নির্ণয় করিয়া, প্রদত্ত সমীকরণের কোন একটিতে সেই মান সংস্থাপন করিলে অপর অব্যক্ত রাশির মান নির্ণীত হইবে।

উদাহরণ।

$$৪স + ৩য = ২৪ \qquad (১)$$
$$৩স + ২য = ১৭ \qquad (২)$$

(১) হইতে $$য = \frac{২৪ - ৪স}{৩},$$

(২) হইতে $$য = \frac{১৭ - ৩স}{২},$$

∴ $$\frac{২৪ - ৪স}{৩} = \frac{১৭ - ৩স}{২},$$

∴ $$৪৮ - ৮স = ৫১ - ৯স,$$

∴ $$স = ৩,$$

∴ (১) হইতে $১২ + ৩য = ২৪,$

∴ $$য = \frac{২৪ - ১২}{৩}$$
$$= ৪।$$

১০৬। উপরে (১০৩ ধারায়) বলা হইয়াছে

দুইটি অব্যক্ত রাশিবিশিষ্ট দুইটি সমীকরণ থাকিলে উভয় অব্যক্ত রাশিরই সাধারণতঃ একটি নির্দিষ্ট মান থাকে।

কিন্তু সমীকরণ দুইটি পরস্পর **স্বাধীন** ও **সঙ্গত** না হইলে তাহা হইতে অব্যক্ত রাশিদ্বয়ের মান নির্ণয় হয় না।

তাহার উদাহরণ নিম্নে দিয়া, পরে তাহার হেতু নির্দেশ করা যাইবে।

মনে কর
$$২স + ৩য = ৪ \qquad (১)$$
$$৪স + ৬য = ৮ \qquad (২)$$

এ স্থলে (১) কে ২ দিয়া গুণ করিয়া গুণফল (২) হইতে বাদ দিলে

$$০ = ০,$$

এই মাত্র পাওয়া যায়, এবং তাহা হইতে স অথবা য কাহারই মান নির্ণয় করা যায় না।

আবার (১) হইতে

$$স = \frac{৪ - ৩য}{২} ,$$

এবং স এর এই মান (২) এতে সংস্থাপন করিলে

$$২ \times (৪ - ৩) য + ৬য = ৮,$$

অর্থাৎ $৮ = ৮,$

এই মাত্র পাওয়া যায়, এবং তদ্দ্বারা স অথবা য নির্ণয়ের কোন উপায় হয় না।

এবং (১) ও (২) উভয় হইতে স এর মান নির্ণয় করিয়া যে সমীকরণ পাওয়া যায় তাহা এই—

$$স = \frac{৪ - ৩য}{২} = \frac{৮ - ৬য}{৪},$$

অর্থাৎ $৮ - ৬য = ৮ - ৬য,$

অর্থাৎ $০ = ০$ ।

সুতরাং তদ্দ্বারাও স এর এবং য এর মান নির্ণয়ের কোন উপায় হয় না। অতএব ১০৫ ধারার কোন প্রণালীই ফলদায়ক হইল না।

এবং তাহাই হইবার কথা। কারণ, এস্থলে (১) ও (২) দুইটি পৃথক্ ও স্বাধীন সমীকরণ নহে। দ্বিতীয়টি প্রথমটির রূপান্তর মাত্র, এবং প্রথমটিকে ২ দিয়া গুণ করার ফল। সুতরাং এ স্থলে একটি মাত্র সমীকরণ ৩স+২য=১২, আছে, এবং স ও য এর কোন নির্দ্দিষ্ট মান নাই।

$স = ১$ হইলে, $য = ৪\frac{১}{২}$, $স = ২$ হইলে, $য = ৩,$

$স = ৩$ হইলে, $য = ১\frac{১}{২}$, $স = ৪$ হইলে, $য = ০,$ ইত্যাদি।

আবার মনে কর

$$২ স + ৩ য = ৪ \quad (১)$$

$$৩ স + ৪ য = ৪ \quad (২)$$

তাহা হইলে, $স + \quad য = ০,$

এবং $স = ০$, $য = ০$ অথবা $স = অ$, $য = -অ$ শেষোক্ত সমীকরণের মান হইতেছে, কিন্তু তাহা (১) ও (২) এর মান নহে, কারণ $স = ০$ বা $অ$, $য = ০$ বা $-অ$ হইলে (১) ও (২) কোনটিরই সাম্য বজায় থাকে না। এবং স ও য এর এমন কোন মান নাই যদ্দারা (১) ও (২) বজায় থাকে। আর তাহার কারণ এই যে (১) ও (২) পরস্পর সঙ্গত নহে।

যদি $২ স + ৩ য = ৪$, হয়, তবে
$৩ স + ৪ য = ৪$ হইতে পারে না।

১০৭। পূর্ব্বে বলা হইয়াছে, দ্বিবর্ণ সরল সমীকরণ দুইটি পরস্পর **স্বাধীন** ও **সঙ্গত** হইলে তবে অব্যক্ত রাশিদ্বয়ের নির্দ্দিষ্ট মান থাকিবে, নতুবা তাহা থাকিবে না। এবং তাহার উদাহরণও উপরে দেওয়া গিয়াছে। এক্ষণে সেই কথা সাধারণ ভাবে সপ্রমাণ করা যাইতেছে।

দ্বিবর্ণ সরল সমীকরণের সাধারণ আকার এইরূপ,

$$কস + খয = গ।$$

মনে কর সমীকরণ দুইটি এই—

$$ক_১ স + খ_১ য = গ_১ \qquad (১)$$

$$ক_২ স + খ_২ স = গ_২ \qquad (২)$$

তাহা হইলে $স = \frac{খ_২ গ_১ - খ_১ গ_২}{ক_১ খ_২ - ক_২ খ_১}$,

$$য = \frac{ক_১ গ_২ - ক_২ গ_১}{ক_১ খ_২ - ক_২ খ_১}।$$

এখন যদি $ক_১ খ_১ - ক_২ খ_১ = ০$
এবং $খ_২ গ_১ - খ_১ গ_২ = ০$ না হইয়া $= ন$ হয়,
ও $ক_১ গ_২ - ক_২ গ_১ = ০$ না হইয়া $= ম$ হয়,

তাহা হইলে $স = \frac{ন}{০}$, $য = \frac{ম}{০}$ হইবে, অর্থাৎ স ও য এর কোন সসীম মান থাকিতে পারে না, তাহারা উভয়ই $= \infty$।

দেখা যাউক ইহার কারণ কি।

$$ক_১খ_২ - ক_২খ_১ = ০$$

$$\therefore \quad ক_১খ_২ = ক_২খ_১$$

$$\therefore \quad \frac{ক_১}{ক_২} = \frac{খ_১}{খ_২} = চ$$ মনে কর।

তাহা হইলে $ক_১ = চক_২$, $খ_১ = চখ_২$,

এবং (১) এই আকার ধারণ করিবে,

$$চক_২স + চখ_২য = গ_১ \quad \ldots \quad (৩)$$

$$\therefore \quad ক_২স + খ_২য = \frac{গ_১}{চ}। \quad \ldots \quad (৪)$$

কিন্তু $ক_১গ_২ - ক_২গ_১ = ০$ নহে, $\therefore \frac{গ_১}{গ_২} = \frac{ক_১}{ক_২} = চ$ নহে।

$\therefore \quad গ_২ = \frac{গ_১}{চ}$ নহে। সুতরাং

(২) ও (৪) সমীকরণদ্বয় অসঙ্গত হইতেছে। কারণ,

$ক_২স + খ_২য = গ_২$ এবং $= \frac{গ_১}{চ}$,

অর্থাৎ $ক_২স + খ_২য$ দুইটি ভিন্ন ভিন্ন রাশির সহিত সমান হইতে পারে না।

এবং (৪) সমীকবণ (৩) এব রূপান্তব মাত্র,

ও (৩) সমীকবণ (১) এর রূপান্তব মাত্র।

সুতরাং প্রস্তাবিত সমীকরণ (১) সমীকরণ (২) এর সহিত অসঙ্গত হইতেছে। অর্থাৎ তাহাদেব মধ্যে (১) এব বাম পক্ষ (২) এর বাম পক্ষের চ গুণ হইতেছে, কিন্তু (১) এর দক্ষিণ পক্ষ (২) এব দক্ষিণ পক্ষেব চ গুণ হইতেছে না। এই অসঙ্গত ভাব স ও য এর কোন সসীম মান দ্বারা সঙ্গত করা যায় না।

এবং $স = \frac{ন}{০} = \infty$, $য = \frac{ম}{০} = \infty$,

ইহার অর্থ এই যে উপরিউক্ত অসঙ্গত ভাব কেবল অনন্তেই সঙ্গত হইতে পারে।

এই স্থানে কুমারসম্ভবের দ্বিতীয়সর্গে ঋষিগণের স্তোত্রের একটি শ্লোক স্মরণ করিবার যোগ্য।

"দ্রব দৃঢ, স্থূলসূক্ষ্ম, লঘু কিন্তু গুরু।
ব্যক্তাব্যক্ত, অসম্ভব সম্ভব তোমাতে।"[১]

১০৮। মনে কর $ক_১খ_২ - ক_২খ_১ = ০$,

এবং $খ_২গ_১ - খ_১গ_২ = ০$,

ও $ক_১গ_২ - ক_২গ_১ = ০$।

তাহা হইলে $স = \frac{০}{০}$, $য = \frac{০}{০}$,

অর্থাৎ স ও য এর কোন নির্দ্দিষ্ট মান নাই।

দেখা যাউক ইহার কারণ কি।

উপরে যে অনুমান করা গিয়াছে

তদনুসারে,

$$\frac{ক_১}{ক_২} = \frac{খ_১}{খ_২} = \frac{গ_১}{গ_২} = চ।$$

$\therefore\ ক_১ = চক_২,\ খ_১ = চখ_২,\ গ_১ = চগ_২$।

সুতরাং (১) সমীকরণ এই আকার ধারণ করিতেছে—

$$চক_২স + চখ_২য = চগ_২।$$

$$\therefore\quad ক_২স + খ_২য = গ_২।$$

অর্থাৎ (১) ও (২) দুইটি পরস্পর স্বাধীন সমীকরণ নহে, প্রথমটি দ্বিতীয়টিকে চ দ্বারা গুণ করিলেই পাওয়া যায়। সুতরাং এস্থলে বস্তুতঃ দ্বিবর্ণ সমীকরণ একটিমাত্র আছে, অতএব অব্যক্ত রাশিদ্বয়ের কোন নির্দ্দিষ্ট মান থাকিতে পারে না। স এর যে কোন মান লইয়া তদনুযায়ী য এর এক একটি মান নিরূপিত হইতে পারে।

১। দ্রবঃ সঙ্ঘাতকঠিনঃ স্থূলঃ সূক্ষ্মো লঘুর্গুরুঃ।
ব্যক্তো ব্যক্তেতরশ্চাসি প্রাকাম্যং তে বিভূতিষু॥
কুমারসম্ভবঃ, ২, ১১।

১০৯। ত্রিবর্ণ সরল সমীকরণ সমাধানের নিয়ম সঙ্ক্ষেপে এই।--

এইরূপ স্থলে যে তিনটি সমীকরণ থাকে তাহাদের মধ্যে দুইটি হইতে দুইটি অব্যক্ত রাশির মানদ্বয় (তৃতীয় অব্যক্ত রাশিকে ব্যক্ত মনে করিয়া) ১০৫ ধারায় দর্শিত প্রণালী অনুসারে নিরূপণ কর। তাহার পর সেই নিরূপিত মানদ্বয় সেই রাশিদ্বয়ের স্থলে তৃতীয় সমীকরণে সংস্থাপিত করিলে কেবল তৃতীয় অব্যক্ত রাশিবিশিষ্ট একটি সমীকরণ পাইবে, এবং তাহা হইতে সেই অব্যক্ত রাশির মান নির্ণীত হইবে। তদনন্তর এই শেষোক্ত মান সেই অব্যক্ত রাশির স্থলে প্রথমোক্ত সমীকরণদ্বয়ে সংস্থাপিত করিয়া অপর দুইটি অব্যক্ত রাশির মান নিরূপণ কর।

উপরের নিয়মটি সহজে খাটাইবার নিমিত্ত নিম্নের ধারার কথাগুলি স্মরণ রাখা আবশ্যক।

১১০। মনে কর

$$ক_১স+খ_১ষ+গ_১শ=ঘ_১ \quad (১)$$
$$ক_২স+খ_২ষ+গ_২শ=ঘ_২ \cdots (২)$$
$$ক_৩স+খ_৩ষ+গ_৩শ=ঘ_৩ \quad (৩)$$

সমীকরণ (২) কে ল দিয়া, ও (৩) কে ম দিয়া গুণ করিয়া সেই গুণিত সমীকরণদ্বয় (১) এর সহিত যোগ কর।

তাহা হইলে

$$(ক_১+ক_২ল+ক_৩ম)স+(খ_১+খ_২ল+খ_৩ম)ষ+(গ_১+গ_২ল+গ_৩ম)শ$$
$$=ঘ_১+ঘ_২ল+ঘ_৩ম। \quad (৪)$$

এখন মনে কর

$$খ_১+খ_২ল+খ_৩ম=০,$$
$$গ_১+গ_২ল+গ_৩ম=০,$$

তাহা হইলে (১০৫ ধারার প্রথম প্রণালী অবলম্বন দ্বারা)

$$\frac{ল}{খ_৩গ_১-খ_১গ_৩}=\frac{ম}{খ_১গ_২-খ_২গ_১}=\frac{১}{খ_২গ_৩-খ_৩গ_২}=চ$$

(মনে কর)...(৫)

এক্ষণে (৫) হইতে নির্ণীত ল ও মএর মান (৪) এতে সংস্থাপিত করিলে,

$$(\text{ক}_১+\text{ক}_২\text{ল}+\text{ক}_৩\text{ম})\ \text{স}=\text{ঘ}_১+\text{ঘ}_২\text{ল}+\text{ঘ}_৩\text{ম},$$

অথবা $\{\text{ক}_১(\text{খ}_২\text{গ}_৩-\text{খ}_৩\text{গ}_২)\text{চ}+\text{ক}_২(\text{খ}_৩\text{গ}_১-\text{খ}_১\text{গ}_৩)\text{চ}$

$$+\text{ক}_৩(\text{খ}_১\text{গ}_২-\text{খ}_২\text{গ}_১)\text{চ}\}\text{স}$$

$$=\text{ঘ}_১(\text{খ}_২\text{গ}_৩-\text{খ}_৩\text{গ}_২)\text{চ}+\text{ঘ}_২(\text{খ}_৩\text{গ}_১-\text{খ}_১\text{গ}_৩)\text{চ}$$

$$+\text{ঘ}_৩(\text{খ}_১\text{গ}_২-\text{খ}_২\text{গ}_১)\text{চ}\text{।}$$

$$\therefore \text{স}=\frac{\text{ঘ}_১(\text{খ}_২\text{গ}_৩-\text{খ}_৩\text{গ}_২)+\text{ঘ}_২(\text{খ}_৩\text{গ}_১-\text{খ}_১\text{গ}_৩)+\text{ঘ}_৩(\text{খ}_১\text{গ}_২-\text{খ}_২\text{গ}_১)}{\text{ক}_১(\text{খ}_২\text{গ}_৩-\text{খ}_৩\text{গ}_২)+\text{ক}_২(\text{খ}_৩\text{গ}_১-\text{খ}_১\text{গ}_৩)+\text{ক}_৩(\text{খ}_১\text{গ}_২-\text{খ}_২\text{গ}_১)}\text{।}$$

এবং ঐরূপে য ও শ এর মান জানা যাইবে।

দেখা যাইতেছে, সএর মূল্য হইতে যএর মূল্য নির্ণয় করিতে হইলে $\text{ক}_১$, $\text{ক}_২$, ও $\text{ক}_৩$ এর স্থানে $\text{খ}_১$, $\text{খ}_২$, ও $\text{খ}_৩$ লিখিতে হইবে।

এবং সএর মূল্য হইতে শএর মূল্য নির্ণয় করিতে হইলে $\text{ক}_১$, $\text{ক}_২$, ও $\text{ক}_৩$ স্থানে $\text{গ}_১$, $\text{গ}_২$, $\text{গ}_৩$ লিখিতে হইবে। এবং তিনটির মূল্যেই হর একই থাকিবে।

১১১। দুই তিন ইত্যাদি সমীকরণ হইতে এক, দুই ইত্যাদি অব্যক্ত রাশির **অপনয়নই** সমবর্ত্তী সমীকরণ সমাধানের মূল প্রক্রিয়া। অতএব রাশি অপসারণ সম্বন্ধে দুই একটি কথা স্মরণার্থে এই স্থানে বিশেষ করিয়া বলা আবশ্যক।

১ম। যদি $\text{ক}_১\text{স}+\text{খ}_১=০\ .\ (১)$

$$\text{ক}_২\text{স}+\text{খ}_২=০\quad(২)$$

তাহা হইলে (১) হইতে $\text{স}=-\frac{\text{খ}_১}{\text{ক}_১}$

(২) হইতে $\text{স}=-\frac{\text{খ}_২}{\text{ক}_২}$

$$\therefore -\frac{\text{খ}_১}{\text{ক}_১}=-\frac{\text{খ}_২}{\text{ক}_২},\quad \therefore \text{ক}_১\text{খ}_২=\text{ক}_২\text{খ}_১$$

$$\text{এবং } \text{ক}_১\text{খ}_২-\text{ক}_২\text{খ}_১=০\quad(৩)$$

অর্থাৎ (১) ও (২) একসঙ্গে সত্য হইতে গেলে (৩) সত্য হওয়া আবশ্যক।

২য়। যদি $ক_১স+খ_১য=গ_১$ (৪)

$ক_২স+খ_২য=গ_১$ ... (৫)

তাহা হইলে (১০৫ ধারা দ্রষ্টব্য)

$$\frac{স}{খ_২গ_১-খ_১গ_২}=\frac{য}{গ_২ক_১-গ_১ক_২}=\frac{১}{ক_১খ_২-ক_২খ_১}। \quad ...(৬)$$

৩য়। $ক_১স+খ_১য=গ_১$ ...(৭)

$ক_২স+খ_২য=গ_২$ (৮)

$ক_৩স+খ_৩য=গ_৩$ (৯)

তাহা হইলে ১০৫ ধারা মতে (৭) ও (৮) হইতে স ও যএর মান স্থির করিয়া তাহা (৯) সমীকরণে সংস্থাপিত করিলে

$$ক_৩\frac{খ_২গ_১-খ_১গ_২}{ক_১খ_২-ক_২খ_১}+খ_৩\frac{ক_১গ_২-ক_২গ_১}{ক_১খ_২-ক_২খ_১}=গ_৩$$

$$\therefore ক_৩(খ_২গ_১-খ_১গ_২)+খ_৩(ক_১গ_২-ক_২গ_১)$$
$$-গ_৩(ক_১খ_২-ক_২খ_১)=০ \quad ..(১০)$$

৪র্থ। যদি $ক_১স+খ_১য+গ_১শ=০$ (১১)

$ক_২স+খ_২য+গ_২শ=০$ (১২)

$ক_৩স+খ_৩য+গ_৩শ=০$ (১৩)

তাহা হইলে (১১) ও (১২) হইতে শ অপসারণ দ্বারা

$(ক_১গ_২-ক_২গ_১)স+(খ_১গ_২-খ_২গ_১)য=০$,

$\therefore স(গ_১ক_২-গ_২ক_১)=য(খ_১গ_২-খ_২গ_১)$,

$$\therefore \frac{স}{খ_১গ_২-খ_২গ_১}=\frac{য}{গ_১ক_২-গ_২ক_১}।$$

ঐরূপে (১১) ও (১২) হইতে য অপসারণ দ্বারা

$$\frac{স}{খ_১গ_২-খ_২গ_১}=\frac{শ}{ক_১খ_২=ক_২খ_১}।$$

$$\therefore \frac{স}{খ_১গ_২-খ_২গ_১}=\frac{য}{গ_১ক_২-গ_২ক_১}=\frac{শ}{ক_১খ_২-ক_২খ_১}=চ$$

(মনে কর) (১৪)

এবং স, ষ, ও শ এর (১৪) হইতে প্রাপ্ত মূল্য (১৩) তে সংস্থাপিত করিয়া চ এর মূল্য জানা যাইবে, আর তাহার পর (১৪) হইতে স, ষ, ও শ এর নির্দ্দিষ্ট মান নির্ণীত হইবে।

১১২। এক্ষণে একাধিকবর্ণ সমবর্ত্তী সরল সমীকরণের দুইটি উদাহরণের ও তৎসংক্রান্ত তিনটি প্রশ্নের সমাধান করা যাইবে।

(১) উদাহরণ। $\frac{স}{৪}+\frac{ষ}{৫}+১=\frac{স}{৫}+\frac{ষ}{৪}=২৩$।

এস্থলে সমীকরণ দুইটি এই—

$$\frac{স}{৪}+\frac{ষ}{৫}+১=২৩, \text{ এবং } \frac{স}{৫}+\frac{ষ}{৪}=২৩,$$

অর্থাৎ
$$\left.\begin{array}{l}\frac{স}{৪}+\frac{ষ}{৫}=২৩-১=২২\\ \frac{স}{৫}+\frac{ষ}{৪}=২৩\end{array}\right\}$$

অর্থাৎ $৫স+৪ষ=৪৪০$ (১)

$৪স+৫ষ=৪৬০$ (২)

∴ (১) হইতে (২) বিয়োগ দ্বারা

$স-ষ=-২০$

∴ $স=ষ-২০$,

∴ (১) হইতে $৫ষ-১০০+৪ষ=৪৪০$

∴ $৯ষ=৫৪০$

∴ $ষ=৬০$

এবং $স=৬০-২০=৪০$।

(২) উদাহরণ। $স-ষ+শ=১$ (১)

$স-২ষ+৪শ=৮$ (২)

$স-৩ষ+৯শ=২৭$ (৩)

(১) হইতে (২) বাদ দিয়া $ষ-৩শ=-৭$ (৪)

(২) হইতে (৩) বাদ দিয়া ষ − ৫শ = −১৯   (৫)

(৪) হইতে (৫) বাদ দিয়া   ২শ = ১২,

∴ শ = ৬।

∴ (৪) হইতে   ষ = ৩ × ৬ − ৭ = ১১,

এবং (১) হইতে   স = ১ + ১১ − ৬ = ৬।

এই দুইটি উদাহরণ অতি সহজ, এই জন্য ইহাতে ১০৫ বা ১১০ ধারাব কোন সাঙ্কেতিক বাক্যেব প্রয়োগেব প্রয়োজন হইল না।

দ্বিতীয় উদাহরণটিব ১১০ধারাব নিয়মানুসারে সমাধান কবিতে গেলে

−১ − ২ল − ৩ম = ০

১ + ৪ল + ৯ম = ০

তাহা হইলে   −২ল = ২, ∴ ল = −১,

এবং ∴ ম = ১/৩।

∴ (১ + ১ × (−১) + ১ × ১/৩)স   = ১ + ৮ × (−১) + ২৭ × ১/৩,

∴ ১/৩স = ২, ∴ স   = ৬।

∴ (১) হইতে − ষ + শ = −৫,

(২) হইতে −২ষ + ৪শ = ২।

∴   ২ষ = ২২, এবং ষ = ১১।

∴ (১) হইতে   শ = ১ − ৬ + ১১ = ৬।

(৩) উদাহবণ। একটি বৃক্ষে কএকটি শুকপক্ষী ও আর একটি বৃক্ষে আর কএকটি শুকপক্ষী বসিয়া আছে, এবং দেখা গেল, যদি প্রথম বৃক্ষ হইতে দ্বিতীয় বৃক্ষে একটি পক্ষী উড়িয়া আসে তবে দ্বিতীয় বৃক্ষের পক্ষীর সংখ্যা প্রথম বৃক্ষেব পক্ষীর সংখ্যার দ্বিগুণ হইবে, কিন্তু যদি দ্বিতীয় হইতে প্রথম বৃক্ষে একটি পক্ষী উড়িয়া যাইত তাহা হইলে উভয় বৃক্ষে পক্ষীর সংখ্যা সমান হইত। কোন বৃক্ষে ক'টি পক্ষী ছিল?

মনে কর প্রথম বৃক্ষে পক্ষীর সংখ্যা = স,

দ্বিতীয়   = ষ।

তাহা হইলে প্রশ্নানুসারে

$$ব+১=২\times(স-১),$$
$$ব-১=স+১ \quad।$$

অর্থাৎ $\left.\begin{array}{l}ব+১=২স-২\\ ব-১=স+১\end{array}\right\}$

$\therefore \quad ২=স-৩, \therefore স=৫,$

এবং $\quad ব=স+২=৫+২=৭।$

৪র্থ উদাহরণ। দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যা সেই অঙ্কদ্বয়ের যোগফলের চতুর্গুণ, এবং অঙ্কদ্বয়ের একের স্থানে অপরটিকে লিখিলে যে সংখ্যা হয় তাহা সেই মূল সংখ্যার দ্বিগুণ অপেক্ষা ৯ কম। সেই মূল সংখ্যাটি কি?

মনে কর এককের ঘরের অঙ্ক $=স$,

দশকের ... .. $=ব$।

তাহা হইলে সংখ্যাটি $=১০ব+স$

এবং অঙ্কের স্থান পরিবর্ত্ত করিলে সংখ্যাটি $১০স+ব$।

অতএব প্রশ্নানুসারে $১০ব+স=৪(ব+স),$

$$১০স+ব=(১০ব+স)\times২+৯।$$

অর্থাৎ $\quad ৬ব-৩স=০ \quad ..(১)$

$$১৯ব-৮স=৯ \quad \cdot\ (২)$$

.. (২) কে ৩ দিয়া গুণ করিয়া তাহা হইতে (১) কে ৮ দিয়া গুণ করিয়া বাদ দিলে, $৫৭ব-৪৮ব=২৭,$

$\therefore \qquad ৯ব=২৭, \therefore ব=৩।$

এবং $\therefore$ (১) হইতে $৩স=৬\times৩=১৮,$ ও $স=৬।$

$\therefore$ মূল সংখ্যা $\qquad =৩৬।$

(৫) উদাহরণ। কএর বয়স খএর দ্বিগুণ ও গএর অপেক্ষা ৪বৎসর অধিক। এবং ক, খ, ও গ তিন জনের বয়স একত্র করিলে ৯৬ বৎসর। খএর বয়স কত?

মনে কর খএর বয়স = স বৎসর,

গএর ... = য ..,

তাহা হইলে কএর .. = ২স ।

∴ প্রশ্নানুসারে, ২স = য + ৪,

২স + স + য = ৯৬।

∴ ২স − য = ৪,

৩স + য = ৯৬।

∴ যোগদ্বারা ৫স = ১০০,

∴ স = ২০।

তৃতীয় পরিচ্ছেদ।

একবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণ।

১১৩। একবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকবণের সাধাবণ পূর্ণ আকার এই,

$$কস^২ + খস + গ = ০। \qquad (১)$$

ইহাতে অব্যক্ত বাশি স এব দ্বিতীয় শক্তি ও প্রথম শক্তি উভয়ই আছে, এবং ইহার ব্যক্ত বাশি ক, খ, ও গ ধনবাশি বা ঋণবাশি, অখণ্ড বাশি বা খণ্ড বাশি, অথবা ০ হইতে পাবে।

এখন দেখা যাউক কিরূপে ইহাব মান নির্ণয় কবা যাইবে।

সমশোধন দ্বাবা (১) হইতে পাওয়া যায়,

$$কস^২ + খস = - গ।$$

এবং এই সমীকরণকে ৪ ক দিয়া গুণ কবিয়া ও উভয় দিকে খ^২ যোগ কবিয়া,

$$৪ ক^২স^২ + ৪ কখস + খ^২ = খ^২ - ৪ কগ \qquad (২)$$

এই সমীকবণ পাওয়া যায়।

এই প্রক্রিয়ার ফলে (২) এব বাম পক্ষ একটি সম্পূর্ণ বর্গ রাশি হইল।

$\therefore$ (২) এর উভব দিকেব বর্গমূল লইলে,

$$২ কস + খ = \pm \sqrt{খ^২ - ৪ কগ}।$$

বাম দিকেব বর্গমূলে + চিহ্ন দেওয়া গেল, কাবণ যে চিহ্নই লওয়া যাউক, উভয় দিকের বর্গ লইলে (২) সমীকবণই পাওয়া যাইবে।

$$\therefore\ ২ কস = - খ \pm \sqrt{খ^২ - ৪ কগ}$$

এবং $\therefore \quad স = \dfrac{- খ \pm \sqrt{খ^২ - ৪ কগ}}{২ ক}$ ।

এইরূপে (১) এর মান নির্ণয় প্রক্রিয়া ভাস্কবাচর্য্যের বীজগণিতের ৫ম অধ্যায়ে প্রদর্শিত হইয়াছে, এবং এই প্রণালীই একটু পরিবর্ত্তিতরূপে সচরাচর ইংরাজি বীজগণিত গ্রন্থে অবলম্বিত হয়।

যথা—(১) কে ক দিয়া ভাগ করিলে

$$স^২ + \frac{খ}{ক}স + \frac{গ}{ক} = ০$$

$$\therefore \quad স^২ + \frac{খ}{ক}স = -\frac{গ}{ক},$$

$\therefore$ উভয় দিকে $\left(\frac{খ}{২ক}\right)^২$ যোগ দ্বারা

$$স^২ + \frac{খ}{ক}স + \frac{খ^২}{৪ক^২} = \frac{খ^২}{৪ক^২} - \frac{গ}{ক},$$

$$\therefore \left(স + \frac{খ}{২ক}\right)^২ = \frac{খ^২ - ৪কগ}{৪ক^২},$$

$$\therefore স + \frac{খ}{২ক} = \pm\frac{\sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক}$$

$$\therefore \quad স = \frac{-খ \pm \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক}$$

(১) উদাহরণ। $৩স^২ + ৪স - ২০ = ০$।

এ স্থলে $স = \frac{-৪ \pm \sqrt{১৬ + ২৪০}}{৬}$

$$= \frac{-৪ \pm ১৬}{৬} = ২ \text{ বা } -\frac{১০}{৩}।$$

(২) উদাহরণ। $২স + \frac{৩}{স} - ৭ = ০$।

এ স্থলে, $২স^২ + ৩ - ৭স = ০$,

অর্থাৎ $২স^২ - ৭স + ৩ = ০$।

$$\therefore স = \frac{৭ \pm \sqrt{৪৯ - ২৪}}{৪}$$

$$= \frac{৭ \pm ৫}{৪} = ৩ \text{ বা } \frac{১}{২}$$

১১৪। দ্বিশক্তি সমীকরণের দুইটি ও কেবল দুইটি মাত্র মান থাকে

মনে কর, কস^২ + খস + গ = ০

সমীকরণের আকার এই।

ইহার যে দুইটি মান আছে তাহা ১১৩ ধারায় দেখা গিয়াছে।

এখন মনে কর ইহার ম, য, র, এই তিনটি মান আছে। তাহা হইলে স এর স্থানে ক্রমশঃ ম, য, র সংস্থাপন দ্বারা,

কম^২ + খম + গ = ০ (১)

কয^২ + খয + গ = ০ (২)

কর^২ + খর + গ = ০ (৩)

∴ (১) হইতে (২) বাদ দিলে

ক (ম^২ − য^২) + খ (ম − য) = ০,

∴ (ম − য) দিয়া ভাগ করিলে

ক (ম − য) = ০। (৪)

ঐরূপে (১) হইতে (৩) বাদ দিলে ও (ম − র) দিয়া ভাগ করিলে

ক (ম − র) = ০ (৫)

এখন (৪) হইতে (৫) বাদ দিলে

ক (র − য) = ০।

অতএব যখন ক = ০ নহে,

অবশ্যই তখন র − য = ০, অর্থাৎ র = য।

সুতরাং য হইতে র ভিন্ন নহে,

অর্থাৎ কস^২ + খস + গ = ০ এই সমীকরণের

ম ও য ভিন্ন আর কোন মান নাই।

১১৫। মনে কর

$$ম = \frac{-খ + \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক}, \quad য = \frac{-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক},$$

তাহা হইলে

$$ম + য = -\frac{খ}{ক}, \quad ম য = \frac{খ^২ - (খ^২ - ৪কগ)}{৪ক^২} = \frac{গ}{ক},$$

এবং $ক (স - ম) (স - য) = ক \{স^২ - (ম + য) স + মষ\}$

$$= ক \left(স^২ + \frac{খ}{ক} স + \frac{গ}{ক}\right)।$$

অতএব যদি ম ও য

$$স^২ + \frac{খ}{ক} স + \frac{গ}{ক} = ০$$

এই সমীকরণের মান হয়, তবে দেখা যাইতেছে,

মানদ্বয়ের যোগফল = সমীকরণের দ্বিতীয় পদের বিপরীত চিহ্নিত প্রকৃতি, এবং মানদ্বয়ের গুণফল = সমীকরণের তৃতীয় পদ।

আরও দেখা যাইতেছে, $কস^২ + খস + গ$ এইরূপ ত্রিপদের উৎপাদক বিশ্লেষের ফল $= ক (স-ম) (স-য)$,

যদি ম ও য

$$স^২ + \frac{ক}{খ} স + \frac{গ}{ক} = ০$$ এই সমীকরণের মান হয়।

১১৬। যদি ম ও য,

$$কস^২ + খস + গ = ০,$$

এই সমীকরণের মানদ্বয় হয়,

তাহা হইলে,

$$ম = \frac{- খ + \sqrt{খ^২ - ৪ কগ}}{২ ক},$$

$$য = \frac{- খ - \sqrt{খ^২ - ৪ কগ}}{২ ক}।$$

অতএব $ম = য$, যদি $(খ^২ - ৪ কগ) = ০$,

অর্থাৎ $খ^২ = ৪ কগ$,

ম ও য রূপবাশি, যদি $খ^২ - ৪ কগ =$ কোন বর্গ রাশি,

ম ও য প্রকৃত রাশি, যদি $খ^২ > ৪ কগ$,

ম ও য ভাবনিক রাশি যদি $খ^২ < ৪ কগ$।

১১৭। যদি $কস^২ + খস + গ = ০$ (১)

এই সমীকরণে, $ক = ০$ তাহা হইলে

$$ম = \frac{০}{০},\ য = \frac{-২খ}{০}।$$

পূর্ব্বে দেখা গিয়াছে (১০১ ও ১০২ ধারা দ্রষ্টব্য)

যদি কোন রাশি $= \frac{০}{০}$ হয়, তবে সেই রাশির পরিমাণ অনির্দ্দিষ্ট, এবং

যদি কোন রাশি $= \frac{কোন\ রাশি}{০}$ তবে তাহার পরিমাণ∞অনন্ত। দেখা যাউক

বর্ত্তমান স্থলে $ম = \frac{০}{০}$, $য = \frac{-২খ}{০}$ ইহাদের অর্থ কি

$$ম = \frac{-খ + \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক}$$

$$= \frac{(-খ + \sqrt{খ^২ - ৪কগ})(-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})}{২ক(-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})}$$

$$= \frac{খ^২ - খ^২ - ৪কগ}{২ক(-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})}$$

$$= \frac{৪কগ}{২ক(-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})}$$

$$= \frac{২গ}{-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ}} = -\frac{গ}{খ},\ যদি\ ক = ০$$

এবং (১) এতে $ক = ০$ লিখিলে

$খস + গ = ০$, অর্থাৎ $খস = -গ$, $স = -\frac{গ}{খ}$।

সুতরাং $ক = ০$ হইলে (১) এর একটি মান $ম = \frac{০}{০} = -\frac{গ}{খ}$।

$$আবার\ য = \frac{-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক}$$

$$= \frac{(-খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})(খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})}{২ক(খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ})}$$

$$= \frac{-২গ}{খ - \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}।$$

এবং এই শেষোক্ত রাশিতে ক যতই ছোট হইবে, ইহার হর ততই ছোট হইবে, সুতরাং এই ভগ্নাংশের মূল্য ততই বড় হইবে। সুতরাং (১) এতে ক যত ছোট হইবে তাহার একটি মান ততই বড় হইবে, ইহাই $স = \frac{-২ খ}{০}$ ইহার অর্থ। কারণ (১) এতে ক যদি ঠিক ০ হয়, তবে খস + গ = ০, সমীকরণটি এই আকার ধারণ করিবে, এবং তাহা আর দ্বিশক্তি সমীকরণ থাকিবে না, সুতরাং তাহার কেবল একটি মাত্র মান থাকিবে ও তাহা $-\frac{গ}{খ}$, অপর কোন মান থাকিবে না।

১১৮। যদি কস² + খস + গ এই রাশিকে স − হ দিয়া ভাগ করা যায়, তাহা হইলে দেখা যাইবে ভাগশেষ = কহ² + খহ + গ। এবং যদি কহ² + খহ + গ = ০ হয়, তবে আর ভাগশেষ থাকে না। অতএব হ যদি কস² + খস + গ = ০ এই সমীকরণের একটি মান হয়, তাহা হইলে কস² + খস + গ এই রাশি স − হ দিয়া ভাজ্য।

১১৯। কতকগুলি সমীকরণ এমন আছে যে তাহারা দ্বিশক্তি সমীকরণ অপেক্ষা উচ্চতরশক্তি সমীকরণ হইলেও দ্বিশক্তি সমীকরণ সমাধানের প্রণালী অবলম্বনে তাহাদের মান নির্ণয় করা যাইতে পারে। সেরূপ সমীকরণ নানাবিধ, এবং তাহাদের সমাধানার্থে নানাবিধ কৌশল প্রয়োগ করা যাইতে পারে। সে সকল কৌশল অভ্যাস দ্বারা শিক্ষা করা যায়। এস্থলে তাহার মধ্যে কেবল কএকটি প্রকার সমীকরণ সমাধানের সঙ্কেত প্রদর্শিত হইবে।

১ম প্রকার।

$$কস^{২ন} + খস^{ন} + গ = ০ \qquad (১)$$

মনে কর $স^{ন} = য$, তাহা হইলে

$$কয^২ + খয + গ = ০,$$

$$\therefore য = \frac{-খ \pm \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক} = স^{ন};$$

$$\therefore স = \left(\frac{-খ \pm \sqrt{খ^২ - ৪কগ}}{২ক}\right)^{\frac{১}{ন}}$$

(১) উদাহরণ। $২ স^৪ - ৩ স^২ - ২০ = ০$

$$স^২ = \frac{৩ \pm \sqrt{৯ + ১৬০}}{৪} = \frac{৩ \pm ১৩}{৪}$$

$$= ৪ \text{ বা } - \frac{৫}{২}।$$

$$স = \pm ২ \text{ বা } \pm \sqrt{-\frac{৫}{২}}$$

২ উদাহরণ। $স + ৪\sqrt{স} - ২১ = ০$।

$$\sqrt{স} = \frac{-৪ \pm \sqrt{১৬ + ৮৪}}{২} = -\frac{৪ \pm ১০}{২}$$

$$= ৩ \text{ বা } - ৭$$

$$স = ৯ \text{ বা } ৪৯।$$

২য় প্রকার।

$$চ\left(কস^{২ন}+খস^{ন}+গ\right)^{২প}+ছ\left(কস^{২ন}+খস^{ন}+গ\right)^{প}+জ=০।$$

মনে কর $কস^{২ন}+খস^{ন}+গ=য$,

$$চয^{২প}+ছয^{প}+জ=০।$$

ইহা প্রথম প্রকারের সমীকরণ। এবং ইহা হইতে যএর মান নির্ণীত হইলে মনে কর সেই মান ম। তাহা হইলে

$$য=কস^{২ন}+খস^{ন}+গ \quad =ম$$

অর্থাৎ $কস^{২ন}+খস^{ন}+(গ-ম)=০$।

ইহাও একটি প্রথম প্রকারের সমীকরণ, এবং ইহার মান পূর্ব্বপ্রদর্শিত প্রণালীতে নির্ণীত হইতে পারিবে।

(১) উদাহরণ।

$$স(স+১)+৩\sqrt{২স^২+৬স+৫}=২(১২-স)+১।$$

ইহা ২য় প্রকারের উদাহরণ, তবে ইহাতে অগ্রে একটু কৌশল প্রয়োগ প্রয়োজন।

সরল আকারে আনিলে সমীকরণটি এইরূপ হইবে,

$$স^২+৩স-২৫+৩\sqrt{২স^২+৬স+৫}=০,$$

$$\therefore\quad ২স^২+৬স-৫০+৬\sqrt{২স^২+৬স+৫}=০,$$

$$\therefore\quad (২স^২+৬স+৫)+৬\sqrt{২স^২+৬স+৫}-৫৫=০।$$

মনে কর $\sqrt{২স^২+৬স+৫}=য,$

$$\therefore\quad য^২+৬য-৫৫=০,$$

$$\therefore\quad য=\frac{-৬\pm\sqrt{৩৬+২২০}}{২}=\frac{-৬\pm১৬}{২}$$

$$=৫ \text{ বা } -১১।$$

$$\therefore\quad ২স^২+৬স+৫=২৫ \text{ বা } ১২১।$$

$$২স^২+৬স-২০=০ \quad (\text{কেবল প্রথম মান লইলে})$$

এবং
$$স=\frac{-৬\pm\sqrt{৩৬+১৬০}}{৪}$$

$$=\frac{-৬\pm১৪}{৪}=২ \text{ বা } -৫।$$

৩য় প্রকার।

অন্যোন্যক সমীকরণ, অর্থাৎ যাহাতে স এর স্থানে $\frac{১}{স}$ লিখিলে আকারে কোন পরিবর্ত্তন হয় না। যথা—

(১) $কস^৩+খস^২+খস+ক=০$

$$ক(স^৩+১)+খস(স+১)=০,$$

$$ক.স+১\{স^২-স+১+খস\}=০।$$

$$\therefore\quad স+১=০$$

অথবা $স^২+(খ-১)স+১=০।$

ইহার প্রথমটি সরল সমীকরণ ও দ্বিতীয়টি দ্বিশক্তি সমীকরণ, এবং ইহাদের মাননির্ণয়ের নিয়ম পূর্ব্বেই প্রদর্শিত হইয়াছে।

(২) $কস^৪+খস^৩+গস^২+খস+ক=০$।

∴ $স^২$ দিয়া ভাগ করিলে,

$ক(স^২+\frac{১}{স^২})+খ(স+\frac{১}{স})+গ=০$।

মনে কর $স+\frac{১}{স}=য$, তাহা হইলে $স^২+\frac{১}{স^২}=য^২-২$,

এবং $ক(য^২-২)+খয+গ=০$।

এই শেষোক্ত দ্বিশক্তি সমীকরণ হইতে য জানা যাইবে।

মনে কর $য=ম$। তাহা হইলে $য=স+\frac{১}{স}=ম$,

∴ $স^২-মস+১=০$, এই দ্বিশক্তি সমীকরণ হইতে স জানা যাইবে।

(৩) $কস^৪+খস^৩-খস-ক=০$।

∴ $ক(স^৪-১)+খস(স^২-১)=০$,

∴ $(স^২-১)\{ক(স^২+১)+খস\}=০$।

∴ $স^২-১=০$,

অথবা $ক(স^২+১)+খস=০$।

এবং এই দুইটি দ্বিশক্তি সমীকরণ হইতে স নির্ণীত হইবে।

(৪) $কস^৫+খস^৪+গস^৩+গস^২+খস+ক=০$।

∴ $ক(স^৫+১)+খস(স^৩+১)+গস^২(স+১)=০$,

∴ $(স+১)\{ক(স^৪-স^৩+স^২-স+১)+খস(স^২-স+১)+গস^২\}=০$,

∴ $স+১=০$,

অথবা $ক(স^৪-স^৩+স^২-স+১)+খস(স^২-স+১)+গস^২=০$,

অর্থাৎ $কস^৪+(খ-ক)স^৩+(ক-খ+গ)স^২+(খ-ক)স+ক=০$।

ইহার প্রথমটি সরল সমীকরণ, ও দ্বিতীয়টি এই ৩য় প্রকারের উপরের (২) উদাহরণের তুল্য। এবং উভয় সমীকরণেরই মান নির্ণয়ের প্রণালী পূর্ব্বে প্রদর্শিত হইয়াছে।

এই ৩য় প্রকারের একটি সাংখ্য প্রকৃতিবিশিষ্ট উদাহরণ দেওয়া যাইতেছে।

উদাহরণ। $৪স^৪ - ১৬স^৩ + ২৩স^২ - ১৬স + ৪ = ০$

$$৪\left(স^২ + \frac{১}{স^২}\right) - ১৬\left(স + \frac{১}{স}\right) + ২৩ = ০$$

$$৪\left(স + \frac{১}{স}\right)^২ - ১৬\left(স + \frac{১}{স}\right) + ১৫ = ০$$

$$স + \frac{১}{স} = \frac{১৬ \pm \sqrt{২৫৬ - ২৪০}}{৮} = \frac{১৬ \pm ৪}{৮}$$

$$= \frac{৫}{২} \text{ বা } \frac{৩}{২}।$$

$$স^২ - \frac{৫}{২}স + ১ = ০$$

$$২স^২ - ৫স + ২ = ০$$

$$স = \frac{৫ \pm \sqrt{২৫ - ১৬}}{৪} = \frac{৫ \pm ৩}{৪} = ২ \text{ বা } \frac{১}{২}।$$

অথবা $স^২ - \frac{৩}{২}স + ১ = ০$

$$২স^২ - ৩স + ২ = ০$$

$$স = \frac{৩ \pm \sqrt{৯ - ১৬}}{৪} = \frac{৩ \pm \sqrt{-৭}}{৪}।$$

৪র্থ প্রকার।

$$(স + ক)^৪ + (স + খ)^৪ = গ।$$

মনে কর $স + ক = য + ঘ$, $স + খ = য - ঘ$,

অর্থাৎ $য = স + \frac{ক + খ}{২}$ ও $ঘ = \frac{ক - খ}{২}$।

তাহা হইলে $(য + ঘ)^৪ + (য - ঘ)^৪ = গ$

অর্থাৎ $য^৪ + ৬ঘ^২য^২ + ঘ^৪ = \frac{গ}{২}$।

এই শেষোক্ত সমীকরণ হইতে র² এর মান নির্ণয় করা যাইবে, এবং তাহা হইতে স'এর মান নির্ণীত হইবে।

৫ম প্রকার।

$$\sqrt{কস^2+খস+গ}+\sqrt{কস^2-খস+গ}=ঘ \qquad (১)$$

কিন্তু, $(কস^2+খস+গ)-(কস^2-খস+গ)=২খস$ (২)

(২) কে (১) দিয়া ভাগ করিলে

$$\sqrt{কস^2+খস+গ}-\sqrt{কস^2-খস+গ}=\frac{২খস}{ঘ} \qquad (৩)$$

∴ (১) ও (৩) যোগ করিলে

$$\sqrt{কস^2+খস+গ}=\frac{ঘ^2+২খস}{২ঘ} \qquad (৪)$$

(৪) এর বর্গ লইলে

$$কস^2+খস+গ=\left(\frac{ঘ^2+২খস}{২ঘ}\right)^2 \qquad (৫)$$

(৫) একটিদ্বিশক্তি সমীকরণ, এবং (৫) হইতে স নির্ণীত হইবে।

৬ষ্ঠ প্রকার।

$$(স+ক)(স+খ)(স+গ)(স+ঘ)=ছ$$

যদি $ক+গ=খ+ঘ=চ$ হয়।

এই সমীকরণের মান নিম্নলিখিত প্রণালীতে নির্ণয় করা যাইতে পারে

প্রদত্ত সমীকরণ হইতে পাওয়া যাইতেছে

$$(স+ক)(স+গ)(স+খ)(স+ঘ)=ছ।$$

$$\therefore \{স^2+(ক+গ)স+কগ\}\{স^2+(খ+ঘ)স+খঘ\}=ছ,$$

$$\therefore \{স^2+চস+কগ\}\{স^2+চস+খঘ\}=ছ,$$

$$\therefore (স^2+চস)^2+(কগ+খঘ)(স^2+চস)+কখগঘ-ছ=০।$$

মনে কর $স^2+চস=র$, তাহা হইলে

$$র^2+(কগ+খঘ)র+কখগঘ-ছ=০।$$

এই শেষোক্ত সমীকরণ হইতে র এর মান নির্ণয় করা যাইতে পারে, এবং তাহা হইতেই স এর মান জানা যাইবে।

১২০। অনেক স্থলে উৎপাদক বিশ্লেষ দ্বারা সমীকরণের মান নিরূপণ সহজ হয়। তাহার তিনটি উদাহরণ এখানে দেওয়া যাইতেছে।

(১) উদাহরণ। $নস^৩+স+ন+১=০$।

অতএব, $ন(স^৩+১)+(স+১)=০$,

$\therefore$ $(স+১)\{ন(স^২-স+১)+১\}=০$,

$\therefore$ $স+১=০$ (১)

অথবা $নস^২-নস+(ন+১)=০$ (২)

(১), হইতে $স=-১$,

(২) হইতে $স=\dfrac{ন\pm\sqrt{ন^২-৪ন^২-৪ন}}{২ন}$

$=\dfrac{ন\pm\sqrt{-(৩ন^২+৪ন)}}{২ন}$।

(২) উদাহরণ। $(স-২)(স-৩)(স-৪)=১\cdot২\cdot৩$।

অতএব, $(স-২)(স-৩)(স-৪)-১\cdot২\cdot৩=০$ (১)

এ স্থলে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে $স=৫$ একটি মান, অতএব (১) এর বাম পক্ষ $(স-৫)$ দিয়া বিভাজ্য।

অর্থাৎ $স^৩-৯স^২+২৬স-৩০=০$

ইহার বাম পক্ষ $স-৫$ দিয়া বিভাজ্য।

ভাগ করিয়া দেখা যাইতেছে (১) এই আকার ধারণ করে

যথা, $(স-৫)(স^২-৪স+৬)=০$

$\therefore$ $স-৫=০$ (২)

অথবা $স^২-৪স+৬=০$ (৩)

(২) হইতে $স=৫$, তাহা পূর্ব্বেই জানা গিয়াছে।

(৩) হইতে $স=\dfrac{৪\pm\sqrt{১৬-২৪}}{২}=\dfrac{৪\pm২\sqrt{-২}}{২}$

$=২\pm\sqrt{-২}$।

(৩) উদাহরণ। $৮ স^৩ + ১৬ স = ৯।$

অতএব $\{(২ স)^৩ - ১\} + ৮(২ স - ১) = ০।$

$\therefore (২ স - ১)\{(৪ স^২ + ২ স + ১) + ৮\} = ০।$

$$\therefore \qquad ২ স - ১ = ০, \qquad (১)$$

অথবা $$৪ স^২ + ২ স + ৯ = ০ \qquad (২)$$

(১) হইতে $স = \frac{১}{২}$, (২) হইতে $স = \frac{-২ \pm \sqrt{৪ - ১৪৪}}{৮}$

$$= \frac{-২ \pm \sqrt{-১৪০}}{৮}$$

১২১। এক্ষণে দ্বিশক্তি সমীকরণ প্রক্রিয়া দ্বারা জটিল প্রশ্ন সমাধানের একটি উদাহরণ দেওয়া যাইবে।

(১) উদাহরণ। কোন পরিবার ভুক্ত লোক সংখ্যার বর্গ ৯০ অপেক্ষা ঠিক সেই সংখ্যা পরিমাণে কম। সে সংখ্যাটি কত ?

মনে কর ইষ্ট সংখ্যা = স।

তাহা হইলে প্রশ্নানুসারে,

$$৯০ - স^২ = স, \qquad (১)$$

$$\therefore স^২ + স - ৯০ = ০,$$

$$\therefore স = \frac{-১ \pm \sqrt{১ + ৩৬০}}{২} = \frac{-১ \pm ১৯}{২}$$

$$= ৯ \text{ বা } -১০।$$

ইহার মধ্যে ৯ই প্রশ্নের প্রকৃত উত্তর।

দ্বিতীয় মান ঋণরাশি এবং তাহা প্রশ্নের উত্তর হইতে পারে না।

এরূপ অনেক স্থলে ঘটে, প্রস্তাবিত প্রশ্নানুসারে যে সমীকরণ পাওয়া যায় তাহার একাধিক মান থাকিলে সকল মান মূল প্রশ্নের উত্তর হয় না। তাহার কারণ এই যে, প্রশ্ন **প্রচলিত** ভাষায় রচিত, কিন্তু তদনুসারে লিখিত সমীকরণ **বীজগণিতের** ভাষায় রচিত, এবং শেষোক্ত ভাষা প্রথমোক্ত ভাষা অপেক্ষা অধিকতর ব্যাপক।

উপরে সমীকরণ (১) এর ভাষা প্রশ্নের ভাষা অপেক্ষা অধিক ব্যাপক। প্রশ্নে লোকসংখ্যা কেবল ধনরাশি হইতে পারে, কিন্তু (১) এতে স ধনরাশি বা ঋণরাশি হইতে পারে, তবে স ঋণরাশি হইলে স², ৯০ অপেক্ষা স পরিমাণ কম না হইয়া স পরিমাণ বেশি হইবে। এবং তাহা হইলে উপরের প্রশ্নের ভাষারও একটু পরিবর্ত্তন আবশ্যক হইবে, যথা, "কোন পরিবারভুক্ত লোক-সংখ্যার বর্গ ৯০ অপেক্ষা ঠিক সেই সংখ্যা পরিমাণ বেশি। সে সংখ্যাটি কত?"

মনে কর ইষ্ট সংখ্যা $=$ স।

তাহা হইলে এবার প্রশ্নানুসারে

$$স^{২} - ৯০ = স$$

$$\therefore \quad স^{২} - স - ৯০ = ০,$$

$$স = \frac{১ \pm \sqrt{১ + ৩৬০}}{২}$$

$$\therefore \quad = \frac{১ \pm ১৯}{২}$$

$$= ১০ \text{ বা } - ৯$$

এবার ১০ ধনরাশি এবং প্রশ্নের প্রকৃত উত্তর, আর—৯ ঋণরাশি এবং এই পরিবর্ত্তিত প্রশ্নের উত্তর নহে।

(২) উদাহরণ। কোন সংখ্যা তাহার বর্গের সহিত একত্র করিলে ৯০ হয়। সংখ্যাটি কত?

মনে কর ইষ্ট সংখ্যা $=$ স।

তাহা হইলে প্রশ্নানুসারে,

$$স^{২} + স = ৯০।$$

$$\therefore \; স^{২} + স - ৯০ \quad ০,$$

$$\therefore \quad স = \frac{-১ \pm \sqrt{১ + ৩৬০}}{২} = \frac{১ \pm ১৯}{২}$$

$$= ৯ \text{ বা } - ১০।$$

এ স্থলে ৯ ও —১০ উভয় সংখ্যাই প্রশ্নের উত্তর। এবং তাহার কারণ এই যে এই প্রশ্নের ভাষা বীজগণিতের ভাষার স্থায় ব্যাপক।

(৩) উদাহরণ। এমন দুইটি ভাগে ১০ কে ভাগ কর যে তাহাদের গুণফল ২৪ হইবে।

মনে কর একটি ভাগ $= স,$

তাহা হইলে অপর ভাগ $= ১০ - স,$

এবং $স \times (১০ - স) = ২৪$।

$\therefore\ স^২ - ১০\,স + ২৪ = ০,$

$$\therefore\qquad স = \frac{১০ \pm \sqrt{১০০ - ৯৬}}{২}$$

$= ৬$ বা ৪।

এ স্থলে ৬ ও ৪ উভয়ই প্রশ্নের উত্তর।

যদি এই প্রশ্নে "গুণফল ২৫ হইবে" বলা হইত, তাহা হইলে

$$স = \frac{১০ \pm \sqrt{১০০ - ১০০}}{২} = ৫।$$

এবং যদি "গুণফল ২৬ হইবে" বলা বলা হইত, তাহা হইলে

$$স = \frac{১০ \pm \sqrt{১০০ - ১০৪}}{২}$$

$$= \frac{১০ \pm \sqrt{-৪}}{২},$$

অর্থাৎ সে কোন প্রকৃত রাশি নহে তাহা ভাবনিক রাশি।

এবং ইহার কারণ এই যে ১০ কে এমন কোন দুই ভাগে ভাগ করা যায় না যে তাহার গুণফল $\frac{১০}{২} \times \frac{১০}{২}$ অর্থাৎ ২৫ অপেক্ষা অধিক হইতে পারে।

ইহার কারণ নিম্নে প্রদর্শিত হইতেছে।

যে কোন রাশি ক'কে

সমান দুই ভাগে ভাগ করিলে ভাগফল $= \frac{ক}{২}$ ও $\frac{ক}{২}$,

অসমান (মনে কর) $= স$ ও $ক - স$।

সমান ভাগদ্বয়ের গুণফল $= \frac{ক^২}{৪}$,

অসমান $= স \times (ক - স)$।

এবং $\frac{ক^২}{৪} - স(ক-স) = \frac{ক^২}{৪} - ২\frac{ক}{২}স + স^২$

$= \left(\frac{ক}{২} - স\right)^২$।

কিন্তু $\left(\frac{ক}{২} - স\right)^২$ যখন $\left(\frac{ক}{২} - স\right)$ এর দ্বিতীয় শক্তি তখন তাহা অবশ্যই ধনবাশি।

$\therefore \frac{ক^২}{৪} > স(ক-স)$, স যাহাই হউক।

কেবল যখন $স = \frac{ক}{২}$,

তখন $স(ক-স) = \frac{ক}{২} \times \frac{ক}{২} = \frac{ক^২}{৪}$,

এবং তখন $\frac{ক^২}{৪} - স(ক-স) = ০$।

অতএব $স(ক-স)$ কখনও $\frac{ক^২}{৪}$ অপেক্ষা বড় হইতে পারে না।

(৪) কোন ব্যক্তি ১২ মাইল বেড়াইয়া দেখিলেন যদি তিনি ঘণ্টায় আর এক মাইল বেশি চলিতেন তাহা হইলে বেড়ান এক ঘণ্টা কমে শেষ হইত। তিনি ঘণ্টায় কত মাইল চলিতেছিলেন ?

মনে কর ভ্রমণকারী ঘণ্টায় স মাইল চলিয়াছিলেন।

তাহা হইলে ১২ মাইল যাইতে $\frac{১২}{স}$ ঘণ্টা লাগিয়াছিল।

যদি ঘণ্টায় আর এক মাইল বেশি চলিতেন

তাহা হইলে ১২ মাইল যাইতে $\frac{১২}{স+১}$ ঘণ্টা লাগিত।

এবং প্রশ্নানুসারে

$$\frac{১২}{স} - ১ = \frac{১২}{স+১}\text{ ।}$$

$\therefore\ ১২(স+১) - স(স+১) = ১২স,$

$\therefore\ স^{২} + স - ১২ \quad = ০,$

$\therefore\ \quad স \quad = \frac{-১ \pm \sqrt{১+৪৮}}{২} = \frac{১ \pm ৭}{২}$

$= ৩$ বা -৪ ।

ইহার মধ্যে ৩ই প্রশ্নের উত্তর,

-৪ তাহার উত্তর নহে।

তবে প্রশ্নটিতে যদি এইরূপ বলা হইত "ঘণ্টায় এক মাইল কম চলিলে তাঁহার বেড়াইতে এক ঘণ্টা বেশি লাগিত", তাহা হইলে সেই প্রশ্নানুসারে

$$\frac{১২}{স} + ১ = \frac{১২}{স-১} \text{ হইত।}$$

$\therefore\ ১২(স-১) + স^{২} - স = ১২স,$

$\therefore\ \quad স^{২} - স - ১২ = ০,$

$\therefore\ স = \frac{১ \pm \sqrt{১+৪৮}}{২} = \frac{১ \pm ৭}{২} = ৪$ বা $-৩,$

এবং এই প্রশ্নের প্রকৃত উত্তর ৪ হইত।

চতুর্থ পরিচ্ছেদ।

একাধিকবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণ।

১২২। একাধিকবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণের মান নির্ণয়ের ভিন্ন ভিন্ন প্রণালী একাধিকবর্ণ সরল সমীকরণের মাননির্ণয়ের ভিন্ন ভিন্ন প্রণালীরই মত, এবং প্রত্যেকেরই মূল উদ্দেশ্য, যোগ বিযোগ গুণ বা বিভাগ দ্বারা, অপর অব্যক্ত রাশিগুলিকে অপনীত করিয়া একটি অব্যক্ত রাশিবিশিষ্ট একটি সমীকরণে উপনীত হওয়া। (১০৪ ও ১০৫ ধারা দ্রষ্টব্য)। সেই প্রণালী প্রয়োগের নিয়ম নিম্নের উদাহরণ দৃষ্টে স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

১২৩। প্রথমে দ্বিবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণের বিষয় আলোচিত হইবে। এরূপ স্থলে দুইটি সমীকরণ থাকিবে।

প্রথম প্রণালী।

সমবর্ত্তী সমীকরণ দুইটির মধ্যে সুবিধা মত কোন একটি হইতে একটি অব্যক্ত রাশির মান অপর অব্যক্ত রাশিকে ব্যক্ত মনে করিয়া নিরূপিত কর, এবং সেই মান সেই রাশির স্থলে অপর সমীকরণে সংস্থাপিত কর। তাহা হইলে এই শেষোক্ত রাশি অপনীত হইবে, ও একটি অব্যক্ত রাশিবিশিষ্ট একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে, এবং তাহা হইতে সেই অব্যক্ত রাশির মূল্য নির্ণীত হইবে।

(১) উদাহরণ।

$$সর + স + র = ২৭ \qquad (১)$$

$$\frac{১}{স} + \frac{১}{র} = \frac{১}{২} \qquad (২)$$

এখানে (২) হইতে $\frac{১}{স} = \frac{১}{২} - \frac{১}{র} = \frac{র-২}{২র}$।

$\therefore \quad স = \frac{২ব}{ব-২}, \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (৩)$

$\therefore$ (১) হইতে $\frac{২ব^২}{ব-২} + \frac{২ব}{ব-২} + ব = ২৭,$

$\therefore \quad ২ব^২ + ২ব + ব^২ - ২ব = ২৭ব - ৫৪,$

$\therefore \quad ৩ব^২ - ২৭ব + ৫৪ = ০,$

$\therefore \quad ব^২ - ৯ব + ১৮ = ০।$

$\therefore \quad ব = \frac{৯ \pm \sqrt{৮১ - ৭২}}{২} = \frac{৯ \pm ৩}{২} = ৬$ বা ৩।

এবং (৩) হইতে $\quad স = ৩$ বা ৬।

(২) উদাহরণ। $\quad স + ব = ১০০ \quad \cdot \quad (১)$

$সব = ২৪০০ \quad \cdots \quad (২)$

(১) হইতে $\quad স = ১০০ - ব,$

(২) হইতে $\quad ব(১০০ - ব) = ২৪০০।$

$\therefore \quad ব^২ - ১০০ব + ২৪০০ = ০,$

$\therefore \quad ব = \frac{১০০ \pm \sqrt{১০০০০ - ৯৬০০}}{২}$

$= \frac{১০০ \pm ২০}{২} = ৬০$ বা ৪০।

$\therefore \quad স = ১০০ - ৬০$ বা $১০০ - ৪০$

$= ৪০$ বা ৬০।

দ্বিতীয় প্রণালী।

যদি সমবর্ত্তী সমীকরণদ্বয় সমঘাত হয় এবং উভয়েরই কোন পদে অব্যক্ত রাশি বা তাহাদের গুণফল সমশক্তিসম্পন্ন হয়, তাহা হইলে মনে কর স=উব। এবং স এর স্থানে উব সংস্থাপনপূর্ব্বক একটি সমীকরণ অপরটি দিয়া ভাগ করিলে ব অপনীত হইয়া উ বিশিষ্ট একটি সমীকরণ পাওয়া যাইবে। তাহা হইতে উ'র মূল্য জানা যাইবে, এবং তাহা হইলে স ও ব জানা যাইবে।

(১) উদাহরণ।

$$স^২ + ব^২ = ৬৫ \quad .. \quad (১)$$

$$সব = ২৮ \quad (২)$$

মনে কর স = উব, তাহা হইলে

(১) হইতে $উ^২ ব^২ + ব^২ = ৬৫ \quad . \quad (৩)$

(২) হইতে $উব^২ = ২৮ \quad .. \quad (৪)$

(৩) কে (৪) দিয়া ভাগ করিলে

$$\frac{উ^২ + ১}{উ} = \frac{৬৫}{২৮},$$

$$২৮ উ^২ - ৬৫ উ + ২৮ = ০,$$

$$\therefore উ = \frac{৬৫ \pm \sqrt{৪২২৫ - ৩১৩৬}}{৫৬}$$

$$= \frac{৬৫ \pm ৩৩}{৫৬} = \frac{৯৮}{৫৬} \text{ বা } \frac{৩২}{৫৬}$$

$$= \tfrac{৭}{৪} \text{ বা } \tfrac{৪}{৭}।$$

$\therefore$ (৪) হইতে $ব^২ = \frac{২৮}{উ} = ২৮ \times \frac{৪}{৭} \text{ বা } = ২৮ \times \frac{৭}{৪}$

$$= ১৬ \text{ বা } ৪৯,$$

$\therefore$ $ব = ৪ \text{ বা } ৭,$

এবং $স = উব = \tfrac{৭}{৪} \times ৪ \text{ বা } \tfrac{৪}{৭} \times ৭$

$$= ৭ \text{ বা } ৪।$$

(২) উদাহরণ।

$$\frac{স + ব}{স - ব} + \frac{স - ব}{স + ব} = \frac{১০}{৩} \quad .. \quad (১)$$

$$স^২ + ব^২ = ৪৫ \quad ... \quad (২)$$

মনে কর স = উব।

$\therefore$ (১) হইতে $\frac{উ + ১}{উ - ১} + \frac{উ - ১}{উ + ১} = \frac{১০}{৩} \quad .. \quad (৩)$

(২) হইতে $ব^২ (উ^২ + ১) = ৪৫ \quad .. \quad (৪)$

(৩) হইতে $(উ+১)^২+(উ-১)^২ = \frac{২০}{৬}(উ^২-১)$

$\therefore$ $২(উ^২+১) = \frac{২০}{৬}(উ^২-১)$

$\therefore$ $৪উ^২ = ১৬,$ $\therefore উ = \pm ২।$

$\therefore$ (৪) হইতে $ষ^২ = \frac{৪৫}{৫} = ৯,\ \therefore ষ = \pm ৩,$

এবং $\therefore$ $স = \pm ৬।$

তৃতীয় প্রণালী।

কোন কোন স্থলে $স = ম+ন,\ ষ = ম-ন$ ধরিয়া লইলে সমীকরণদ্বয়ের মান নির্ণয় সহজ হয়।

(১) উদাহরণ। $স^৪+ষ^৪ = ক^৪$ (১)

$স+ষ = খ$ .. (২)

যদি $স = ম+ন,\ ষ = ম-ন$ হয়,

তবে (২) হইতে $ম+ন+ম-ন = খ,$

$\therefore ২ম = খ$

$\therefore ম = \frac{খ}{২}$ (৩)

(১) হইতে $(ম+ন)^৪+(ম-ন)^৪ = ক^৪,$

$\therefore ২(ম^৪+৬ম^২ন^২+ন^৪) = ক^৪$

$\therefore$ (৩) হইতে $ন^৪+\frac{৩খ^২}{২}ন^২+\frac{খ^৪}{১৬}-\frac{ক^৪}{২} = ০$ ... (৪)

(৪) হইতে $ন^২$ এবং ন নির্ণীত হইবে, এবং তাহা হইলেই স ও ষ নির্ণীত হইবে।

১২৪। ত্রিবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণের মান নির্ণয়ের প্রণালী ত্রিবর্ণ সরল সমীকরণের সমাধানের প্রণালীর মত (১০৯ ধারা দ্রষ্টব্য)। নিম্নের উদাহরণ দৃষ্টে সেই প্রণালীপ্রয়োগ স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

(১) উদাহরণ।

$৩স+ষ-৫শ = ০$ (১)

$৭স-৩ষ-৯শ = ০$ .. (২)

$স^২+২ষ^২+৩শ^২ = ২৩$ ... (৩)

(১) ও (২) হইতে স $=\frac{৩}{২}$শ,

য $=\frac{১}{২}$শ।

∴ (৩) হইতে $\frac{৯}{৪}$শ^২ $+$ $\frac{১}{৪}$শ^২ $+$ ৩শ^২ $=$ ২৩,

∴ ২৩শ^২ $=$ ২৩ $\times$ ৪

∴ শ $=\pm$২।

∴ য $=\pm$১,

এবং স $=\pm$৩।

(২) উদাহরণ। স(য $+$ শ) $=$ ১০০ (১)

য(শ $+$ স) $=$ ১৪৪ (২)

শ(স $+$ য) $=$ ১৫৪ (৩)

∴ ২(সয $+$ যশ $+$ শস) $=$ ৩৯৮,

∴ সয $+$ যশ $+$ শস $=$ ১৯৯। (৪)

(৪) হইতে (৩) বাদ দিয়া সয $=$ ৪৫ (৫)

(৪) হইতে (২) শস $=$ ৫৫ (৬)

(৪) হইতে (১) যশ $=$ ৯৯ (৭)

∴ (৫) ও (৬) এর গুণফল (৭) দিয়া ভাগ দ্বারা স^২ $=$ ২৫, ও স $=\pm$৫,

(৫) ও (৭) (৬) য $=$ ৮১, ও য $=\pm$৯,

(৬) ও (৭) (৫) শ $=$ ১২১, ও শ $=\pm$১১।

১২৫। এক্ষণে একাধিকবর্ণ দ্বিশক্তি সমীকরণ সংক্রান্ত প্রক্রিয়া দ্বারা জটিল প্রশ্ন সমাধানের দুইটি উদাহরণ দেওয়া যাইবে।

(১) উদাহরণ। একটি সমকোণী চতুর্ভুজের দৈর্ঘ্য ৩ হাত বাড়াইলে ও প্রস্থ ২ হাত কমাইলে ক্ষেত্রফল সমান থাকে, এবং দৈর্ঘ্য ৯ হাত বাড়াইলে ও প্রস্থ ৫ হাত কমাইলে তাহার ক্ষেত্রফলের এক চতুর্থাংশ কমিয়া যায়। তাহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত ?

মনে কর দৈর্ঘ্য স হাত, প্রস্থ ষ হাত।
তাহা হইলে প্রশ্নানুসারে

$$(স+৩)(ষ-২)=সষ \qquad (১)$$

$$(স+৯)(ষ-৫)=সষ-\frac{সষ}{৪} \qquad (২)$$

$\therefore$ $$সষ-২স+৩ষ-৬=সষ,$$

ও $$সষ-৫স+৯ষ-৪৫=\frac{৩সষ}{৪}।$$

$\therefore$ $$৩ষ-২স=৬ \qquad (৩)$$

$$\frac{সষ}{৪}-৫স+৯ষ=৪৫ \qquad (৪)$$

(৩) হইতে $$ষ=\frac{২স+৬}{৩}$$

(৪) হইতে $\frac{স}{৪}\times\frac{২স+৬}{৩}-৫স+৬স+১৮=৪৫$

$\therefore$ $স^২+৩স-৩০স+৩৬স+১০৮=২৭০,$

$\therefore$ $স^২+৯স-১৬২=০,$

$\therefore$ $$স=\frac{-৯\pm\sqrt{৮১+৬৪৮}}{২}=\frac{-৯\pm২৭}{২}$$

$$=৯ \text{ বা } -১৮।$$

ঋণরাশি এ প্রশ্নের উত্তর হইতে পারে না,

$\therefore$ স = ৯ হাত, ইহাই এ প্রশ্নের উত্তর।

এবং $$ষ=\frac{২স+৬}{৩}=\frac{২৪}{৩}=৮ \text{ হাত।}$$

(২) উদাহরণ। একটি ট্রেন ক হইতে খ অভিমুখে ও আর একটি খ হইতে ক অভিমুখে একই সময়ে যাত্রা করে, এবং ৪ ঘণ্টা পরে পথে পরস্পর মিলে। প্রথম ট্রেন খ তে পৌছিবার ১ ঘণ্টা ৪৮ মিনিট পরে দ্বিতীয় ট্রেন ক তে পৌছে। ক ও খ এর ব্যবধান ১৪৪ মাইল। কোন ট্রেন ঘণ্টায় কত মাইল যাইতেছিল নিরূপণ কর।

মনে কর ঘণ্টায় প্রথম ট্রেন স মাইল
দ্বিতীয় ট্রেন য মাইল যাইতেছিল।
তাহা হইলে প্রশ্নানুসারে

$$৪\,(স + য) = ১৪৪,$$

এবং $$\frac{১৪৪}{য} = \frac{১৪৪}{স} + ১\frac{৪৮}{৬০}\text{ ।}$$

অর্থাৎ $$স + য = ৩৬ \qquad \cdots (১)$$

$$\frac{১৪৪}{য} - \frac{১৪৪}{স} = \frac{৯}{৫} \qquad \cdots (২)$$

(১) হইতে $$য = ৩৬ - স,$$

(২) হইতে $$\frac{১৪৪}{৩৬-স} - \frac{১৪৪}{স} = \frac{৯}{৫},$$

$$\therefore \quad \frac{১৬}{৩৬-স} - \frac{১৬}{স} = \frac{১}{৫},$$

$$\therefore \quad ৮০স - (২৮৮০ - ৮০স) = ৩৬স - স^{২},$$

$$\therefore \quad স^{২} + ১২৪স - ২৮৮০ = ০,$$

$$\therefore \quad স = \frac{-১২৪ \pm \sqrt{১৫৩৭৬ + ১১৫২০}}{২}$$

$$= \frac{-১২৪ \pm ১৬৪}{২} = \frac{৪০}{২} \text{ বা } -\frac{২৮৮}{২}$$

$$= ২০ \text{ বা } -১৪৪\text{ ।}$$

প্রশ্নানুসারে ঋণরাশি মান অগ্রাহ্য।

$\therefore$ স = ২০ মাইলই স এর প্রকৃত মূল্য।

$\therefore$ য = ৩৬ − স = ১৬ মাইল।

৭। উদাহরণমালা।

১। নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর।—

(১) ২স+১১ = ৭স−১৪।

(২) ৪স+৩ = ৮স−৯।

(৩) র(ফ+স)−পর = ট(ফ+স)−পট।

(৪) স−৫−(৫−স)(স+১) = (স−৫)(১+স)+৪(৫−স)।

(৫) (স+৫/২)(স−৩/২)−(স+৫)(স−৩)+৩/৪ = ০।

২। (১) এক ব্যক্তি কিয়ংদূব ঘণ্টায় ৩½ মাইল হিসাবে চলিয়া ঘণ্টায় ৭ মাইল হিসাবে তাহাব কিয়ংদূব দৌড়িয়া ফিবিয়া আইসেন, এবং বাকি পথটুকু ৭ মিনিটে আইসেন। চলিতে ও ফিবিতে তাঁহাব মোট ৩৫ মিনিট লাগিয়াছিল। তিনি কতদূব দৌড়িয়াছিলেন ?

(২) দুই ব্যক্তি একই সময়ে একই পথে ক হইতে খ তে যাত্রা করে। প্রথম ব্যক্তি অশ্বপৃষ্ঠে ঘণ্টায় ৭½ মাইল যায়, দ্বিতীয় ব্যক্তি ট্রেনে ঘণ্টায় ৩০ মাইল যায়। এবং প্রথম ব্যক্তি দ্বিতীয় ব্যক্তিব ৩০ মিনিট পবে খ'তে পহুছে। ক ও খএব ব্যবধান কত ?

(৩) লণ্ডন হইতে একটি ট্রেন অপবাহ্ণ একটা ৩০ মিনিটেব সময় ছাড়িয়া অপরাহ্ণ ৬টাব সময় ব্রিষ্টলে পহুছে, এবং আব একটি ট্রেন অপবাহ্ণ ৩টাব সময় ব্রিষ্টল হইতে যাত্রা কবিযা অপবাহ্ণ ৬টাব সময় লণ্ডনে পহুছে। দ্বিতীয় ট্রেন প্রথম ট্রেনেব সহিত কয়টার সময় একত্র হইয়াছিল ?

(৪) কতকগুলি পদ্মেব তৃতীয়াংশ, চতুর্থাংশ, পঞ্চমাংশ ও ষষ্ঠাংশ শিব, বিষ্ণু, ভবানী ও সূর্য্যেব পূজায় দিয়া, অবশিষ্ট ৬টি পদ্ম গুরুপূজায় দেওয়া যায়। কতগুলি পদ্ম ছিল ?

(৫) দুটি সংখ্যার মধ্যে বড়টি ছোটটিব দ্বিগুণ, এবং তাহাদেব যোগফল ১৫। ছোট সংখ্যাটি কত ?

৩। নিম্নলিখিত সমীকরণগুলির সমাধান কর।

(১) স+য = ১৫, স−য = ১১।

(২) ২স+৪য = ১·২, ৩·৪স−·০২য = ১।

(৩) $\frac{স}{৪} + \frac{ষ}{৫} + ১ = \frac{স}{৫} + \frac{ষ}{৪} = ২৩$।

(৪) $৫স + ১৬ষ \quad = ১৪৬,\ ১১স + ৫ষ = ১১০$।

(৫) $৩স + ২০ \quad = ৪ষ - ১০,\ ৪(স - ১) = ৩(ষ - ৩)$।

৪। (১) একটি ভগ্নাংশের লবে ২ যোগ কবিলে ভগ্নাংশের মূল্য হয় [illegible], এবং হব হইতে ২ বাদ দিলে তাহাব মূল্য হয় $\frac{১}{২}$। ভগ্নাংশটি কি?

(২) কোন একটি কার্য্য ক ও খ একত্র ৪ দিনে শেষ কবিতে পাবে। তাহাবা একত্র ৩ দিন কার্য্য কবাব পব ক ছাড়িয়া যায় এবং খ তাহা আর ২ দিনে শেষ কবে। ক ও খ প্রত্যেকে একা কত দিনে তাহা শেষ করিত?

(৩) একটি ট্রেন এক ঘণ্টা চলিবাব পব পথে একটা বিভ্রাট ঘটায় এক ঘণ্টা থামিয়া পবে পূর্ব্ব বেগেব তিন পঞ্চমাংশ বেগে চলে ও গন্তব্য স্থানে পহুছিতে তিন ঘণ্টা বিলম্ব হয়। যদি এ বিভ্রাট আব ২ ঘণ্টা পবে ঘটিত তবে পহুছিতে ১ ঘণ্টা ২০ মিনিট বিলম্ব হইত। ট্রেনের পূর্ব্ববেগেব পবিমাণ, এবং যাত্রা কবিবাব স্থান হইতে গন্তব্য স্থানেব ব্যবধান কত?

(৪) এক ব্যক্তিব বয়স তাঁহাব জ্যেষ্ঠ পুত্রেব বয়সেব চতুর্গুণ ও কনিষ্ঠ পুত্রেব বয়সেব পঞ্চগুণ। জ্যেষ্ঠ পুত্রেব বয়স যখন তাহাব বর্ত্তমান বয়সের তিনগুণ হইবে, পিতাব বয়স তখন কনিষ্ঠ পুত্রেব বয়সেব দ্বিগুণ অপেক্ষা তিন বৎসব অধিক হইবে। পিতা ও পুত্রদ্বয়েব বর্ত্তমান বয়সেব পবিমাণ নির্ণয় কব।

(৫) দুইটি সংখ্যাব যোগফল তাহাদেব বিয়োগফলেব তিনগুণ, এবং সেই বিয়োগফল হইতে ২ বাদ দিলে ১ বাকি থাকে। সংখ্যা দুইটি কি কি?

৫। নিম্নেব সমীকবণগুলির মান নির্ণয় কব।

(১) $স^২ - ৪৮স + ৫২৭ \quad = ০$।

(২) $\frac{১}{স - ২} - \frac{১}{স - ১} \quad = \frac{১}{৬}$।

(৩) $স^২ - (ক + খ)স + কখ = ০$।

(৪) $৭৭(স^২ - ১) \quad = ৭২স$।

(৫) $\frac{৩}{৫ - স} + \frac{২}{৪ - স} \quad = \frac{৮}{স + ২}$।

৬। নিম্নের সমীকবণগুলির সমাধান কর।

(১) $২(স^{২}-৩স+১)^{২}+৫(স^{২}-৩স+১)+৩=০$।

(২) $\frac{স^{২}-ক^{২}-খ^{২}}{গ^{২}}-\frac{গ^{২}}{স^{২}-ক^{২}-খ^{২}}=২$।

(৩) $স^{২}+\sqrt{স^{২}-৫}=১১$।

(৪) $স^{৪}+২কস^{৩}=২স+\frac{১}{ক^{২}}$।

(৫) $\sqrt[৩]{ক}+স+\sqrt[৩]{ক-স}=\sqrt[৩]{খ}$

৭। (১) এক দল অলিব সংখ্যাব অর্দ্ধেকের বর্গমূল ও সেই সংখ্যার নবম ভাগের অষ্টভাগ একটি মালতীকুঞ্জে গুঞ্জিতেছে এবং সেই দলের অবশিষ্ট দুইটিব একটি এক পদ্মেব মধ্যে ও অপরটি সেই পদ্মের বাহিরে উড়িতেছে। তাহাদের মোট সংখ্যা কত?

(২) কোন ব্যক্তি ৮৪ মাইল ভ্রমণ কবিয়া দেখিলেন ঘণ্টায় আর ৫ মাইল অধিক ভ্রমণ কবিলে ৫ ঘণ্টা কমে ভ্রমণ শেষ হইত। তিনি ঘণ্টায় কত মাইল ভ্রমণ করিয়াছিলেন?

(৩) কোন একটি সংখ্যা ক কে এমত দুই ভাগে ভাগ কর যে এক ভাগেব বর্গ অপব ভাগ ও সমস্ত সংখ্যাব গুণফলেব সহিত সমান হয়।

(৪) কোন একটি সংখ্যা ও তাহার বর্গের সমষ্টিতে সেই সংখ্যার দ্বিগুণ যোগ করিলে যোগফল তাহার পাঁচগুণ অপেক্ষা তিন অধিক হয়। সংখ্যাটি কত?

(৫) দুটি সংখ্যার বর্গের যোগফলে তাহাদের গুণফলের দ্বিগুণ যোগ কবিলে যত হয় তাহা প্রথমোক্ত যোগফল হইতে সেই গুণফলের দ্বিগুণ বাদ দিলে যাহা বাকি থাকে তাহার পঁচিশগুণ। এবং তাহাদের বিযোগফল ২। সংখ্যা দুটি কি কি?

৮। নিম্নের সমীকরণগুলির সমাধান কব।

(১) $স^{২}+সয=(ক-খ)^{২}$,

$সয+য^{২}=৪কখ$।

(২) $স^২+সয = ক^২$,
$স^২-সয = খ^২$।

(৩) $স^২+সয = ১২$,
$সয-য^২ = ২$।

(৪) $৩স^২+২য^২ = ৫০$,
$সয-৩য^২ = ১$।

(৫) $সয+\frac{স}{য} = ১০$,
$সয^২-স = ৩য$।

৯। (১) দুটি সংখ্যাব যোগফল ১৬, ও তাহাদেব বর্গেব যোগফল ১৩০। সংখ্যা দুটি কি কি ?

(২) দুটি সংখ্যাব গুণফল ৫৪, ও তাহাদের বিযোগফল ৩। সংখ্যা দুটি কি কি ?

(৩) একটি সমকোণী চতুর্ভুজের দৈর্ঘ্য ২ হাত কমাইলে ও প্রস্থ ২ হাত বাড়াইলে তাহাব ক্ষেত্রফল ১৬ বর্গহাত বাড়িবে। এবং তাহার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ উভয়েব বর্গেব যোগফল উভয়েব বিযোগফলেব ৫০ গুণ। ঐ চতুর্ভুজেব দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

(৪) একটি সমকোণী ত্রিভুজেব পবিধি ৩০ ইঞ্চ, ও ক্ষেত্রফল ৩০ বর্গ ইঞ্চ। তাহাব ভুজগুলি কত কত ?

(৫) একটি সমকোণী চতুর্ভুজেব পরিধি ৬০ হাত ও ক্ষেত্রফল ২২১ বর্গ হাত। তাহাব দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কব।

অষ্টম অধ্যায়।

অনুপাত, সমানুপাত, ও বিপরিণাম।

১২৬। দুইটি রাশি ক ও খ সমান হইতে পারে, অথবা অসমান হইতে পারে। অসমান হইলে অবশ্যই একটি বড় ও অপরটি ছোট হইবে, এবং বড়টি ছোটটি অপেক্ষা কত বড় অর্থাৎ তাহাদের পার্থক্য কত তাহা বিয়োগ ক্রিয়ার দ্বারা জানা যায়।

যদি ক > খ,

তাহা হইলে ক ও খ'র পার্থক্য = ক − খ।

ঋণ রাশির অস্তিত্ব স্বীকার করিলে,

ক > বা < খ যাহাই হউক না কেন,

ক ও খ'র পার্থক্য = ক − খ।

তবে ক > খ হইলে ক − খ ধনাত্মক,

ও ক < খ হইলে ক − খ ঋণাত্মক।

১২৭। সমানত্ব বা অসমানত্ব, বড় হওয়া বা ছোট হওয়া, ব্যতীত ক ও খ'র আর এক প্রকার সম্বন্ধ আছে। ক রাশি খ রাশির কতগুণ বা কত ভাগ এভাবেও ক ও খ কে দেখা যাইতে পারে।

একটি রাশি অপর একটি রাশির **কত গুণ** বা **কত ভাগ** এই ভাবে তাহাদিগকে দেখিলে তাহাদের যে সম্বন্ধ, তাহাকে **অনুপাত** বলে।

রাশিদ্বয়কে অনুপাতের **পদ** বলে, এবং প্রথমটিকে **অগ্রপদ** বা **পূর্ব্বপদ** ও দ্বিতীয়টিকে **পশ্চাৎপদ** বা **পরপদ** বলে।

দুটি রাশির অনুপাত লিখিতে হইলে পদদ্বয়ের মধ্যে দুটি বিন্দু অঙ্কিত করিতে হয়, যথা ক ও খ'র অনুপাত ক : খ এইরূপে লিখিত হয়। এবং অনুপাতের অর্থানুসারে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে,

এই অনুপাতের পরিমাণ $\frac{ক}{খ}$, অর্থাৎ ক : খ = $\frac{ক}{খ}$।

আব এই জন্য ক ও খ'র অনুপাত $\frac{ক}{খ}$ এই আকারেও লিখিত হয়।

১২৮। দুইটি বাশিব বর্গেব অনুপাতকে বাশিদ্বয়েব **দ্বিতীয় অনুপাত** বা **দ্বিঘাত** বা **দ্বিগুণ অনুপাত** বলা যায়।
যথা $ক^2 : খ^2$ ইহা ক ও খ'ব দ্বিতীয়ানুপাত।

১২৯। পূর্ব্বপদ পরপদ অপেক্ষা বড় হইলে অনুপাতকে **বৃহত্তর বিষমানুপাত,** ও ছোট হইলে অনুপাতকে **ক্ষুদ্রতর বিষমানুপাত** বলে।

১৩০। অনুপাতেব উভয় পদে কোন এক বাশি যোগ কবিলে বৃহত্তর বিষমানুপাতেব পবিমাণেব হ্রাস ও ক্ষুদ্রতব বিষমানুপাতের পরিমাণের বৃদ্ধি হয়। এবং উভয় পদ হইতে কোন একবাশি বিযুক্ত কবিলে ঠিক তাহাব বিপবীত ফল হয়।

যদি $ক > খ$,

তাহা হইলে $\frac{ক}{খ} < \frac{ক + স}{খ + স}$ এবং $> \frac{ক - স}{খ - স}$।

এবং যদি $ক < খ$,

তাহা হইলে $\frac{ক}{খ} > \frac{ক + স}{খ + স}$ এবং $< \frac{ক - স}{খ - স}$।

কাবণ, $\frac{ক}{খ} = \frac{ক(খ + স)}{খ(খ + স)}, \frac{ক + স}{খ + স} = \frac{খ(ক + স)}{খ(খ + স)}$।

$\therefore \quad \frac{ক}{খ} >$ বা $< \frac{ক + স}{খ + স}$,

যদি $\frac{ক(খ + স)}{খ(খ + স)} >$ বা $< \frac{খ(ক + স)}{খ(খ + স)}$,

অর্থাৎ যদি $ক(খ + স) >$ বা $< খ(ক + স)$

অর্থাৎ যদি $কস >$ বা $< খস$,

অর্থাৎ যদি $ক >$ বা $< খ$।

আবার $\frac{ক}{খ} = \frac{ক(খ - স)}{খ(খ - স)}$, $\frac{ক - স}{খ - স} = \frac{খ(ক - স)}{খ(খ - স)}$।

$\therefore \qquad \frac{ক}{খ} >$ বা $< \frac{ক - স}{খ - স}$,

যদি $\qquad \frac{ক(খ - স)}{খ(খ - স)} >$ বা $< \frac{খ(ক - স)}{খ(খ - স)}$,

অর্থাৎ যদি $ক(খ - স) >$ বা $< খ(ক - স)$

অর্থাৎ যদি $\qquad খস >$ বা $< কস$,

অর্থাৎ যদি $\qquad খ >$ বা $< ক$।

১৩১। দুটি অনুপাতের তুল্যতাকে **সমানুপাত** বলে, এবং যে চারিটি রাশি সেই সমান অনুপাতের পদ, তাহাদিগকে **সমানুপাতী** বলে।

সমানুপাত লিখিতে হইলে সমান অনুপাত দ্বয়ের মধ্যে চারিটি বিন্দু অঙ্কিত করিতে হয়।

যথা, যদি ক খ = গ ঘ,

অর্থাৎ $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$,

তাহা হইলে ক খ ∙ গ ঘ এইরূপে সেই সমানুপাত লিখিতে হয়।

১৩২। সমানুপাতের চতুর্থ রাশিকে **চতুর্থ সমানুপাতী** বলে। যথা, যদি ক খ :: গ ঘ

তাহা হইলে ঘ কে ক, খ, গ'র চতুর্থ সমানুপাতী বলে।

এরূপ স্থলে $\qquad \frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$।

অর্থাৎ কঘ = খগ।

সুতরাং $ঘ = \frac{খগ}{ক}$।

এই সাম্যের উপরই পাটীগণিতের ত্রৈরাশিক প্রক্রিয়া নির্ভর করে।

যদি ক, খ, গ এই তিনটি রাশিতে সমানুপাত সংগঠিত হয়,
অর্থাৎ যদি ক : খ : : খ : গ,
তাহা হইলে মধ্য রাশি খ কে **মধ্যানুপাতী**, ও তৃতীয় রাশি গ কে **তৃতীয়ানুপাতী** বলে।

এবং এরূপ স্থলে $\frac{ক}{খ} = \frac{খ}{গ}$,

অর্থাৎ $খ^{২} = কগ$।

আর $\frac{ক}{গ} = \frac{ক}{খ} \times \frac{খ}{গ} = \frac{ক}{খ} \times \frac{ক}{খ}$

$= \frac{ক^{২}}{খ^{২}}$।

১৩৩। যদি $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$,

তাহা হইলে—

(১) $\frac{ক + খ}{খ} = \frac{গ + ঘ}{ঘ}$,

কারণ, $\frac{ক}{খ} + ১ = \frac{গ}{ঘ} + ১$

অর্থাৎ $\frac{ক + খ}{খ} = \frac{গ + ঘ}{ঘ}$।

ইহাকে **যোগে** সমানুপাত বলে।

(২) $\frac{ক - খ}{খ} = \frac{গ - ঘ}{ঘ}$।

কারণ $\frac{ক}{খ} - ১ = \frac{গ}{ঘ} - ১$।

অর্থাৎ $\frac{ক - খ}{খ} = \frac{গ - ঘ}{ঘ}$।

ইহাকে **বিয়োগে** সমানুপাত বলে।

(৩) $\frac{খ}{ক} = \frac{ঘ}{গ}$।

কারণ $১ \div \frac{ক}{খ} = ১ \div \frac{গ}{ঘ}$

অর্থাৎ $১ \times \frac{খ}{ক} = ১ \times \frac{ঘ}{গ}$।

ইহাকে **বিপর্য্যয়ক্রমে** সমানুপাত বলে।

(৪) $\frac{ক}{গ} = \frac{খ}{ঘ}$।

কারণ, $কঘ = খগ$,

$\therefore$ $কঘ - গঘ = খগ - গঘ$,

অর্থাৎ $\frac{ক}{গ} = \frac{খ}{ঘ}$।

ইহাকে **একান্তর ক্রমে** সমানুপাত বলে।

(৫) $\frac{ক^ন}{খ^ন} = \frac{গ^ন}{ঘ^ন}$।

কারণ, $\frac{ক}{খ} \times \frac{ক}{খ} \times \frac{ক}{খ}$ ন সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$= \frac{গ}{ঘ} \times \frac{গ}{ঘ} \times \frac{গ}{ঘ}$

$\therefore$ $\frac{ক^ন}{খ^ন} = \frac{গ^ন}{ঘ^ন}$।

(৬) $\frac{মক + নখ}{পক + ফখ} = \frac{মগ + নঘ}{পগ + ফঘ}$।

কারণ, $ম \times \frac{ক}{খ} = ম \times \frac{গ}{ঘ}$,

$\therefore$ $ম \times \frac{ক}{খ} + ন = ম \times \frac{গ}{ঘ} + ন$,

$\therefore$ $\frac{মক + নখ}{খ} = \frac{মগ + নঘ}{ঘ}$।

এবং ঐ কারণে, $\frac{পক + ফখ}{খ} = \frac{পগ + ফঘ}{ঘ}$।

$\therefore \quad \frac{মক + নখ}{খ} \div \frac{পক + ফখ}{খ} = \frac{মগ + নঘ}{ঘ} \div \frac{পগ + ফঘ}{ঘ}$,

$\therefore \quad \frac{মক + নখ}{পক + ফখ} = \frac{মগ + নঘ}{পগ + ফঘ}$।

১৩৪। যদি $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} = \frac{ঙ}{চ}$ = ইত্যাদি,

এবং এই সমান অনুপাতগুলির সংখ্যা ন হয়,

তাহা হইলে $\left(\frac{পক^ম + ফগ^ম + বঙ^ম +}{পখ^ম + ফঘ^ম + বচ^ম +}\right)^{\frac{১}{ম}} = \left(\frac{কগঙ}{খঘচ}\right)^{\frac{১}{ন}}$

$= \frac{ক}{খ}$।

মনে কর $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} = \frac{ঙ}{চ}$ = ইত্যাদি = য।

তাহা হইলে ক = খ য, গ = ঘ য, ঙ = চ য, ইত্যাদি, (১)

এবং $পক^ম = পখ^ম য^ম$, $ফগ^ম = ফঘ^ম য^ম$, $বঙ^ম = বচ^ম য^ম$, ইত্যাদি।

$\therefore$ $পক^ম + ফগ^ম + বঙ^ম +$ ইত্যাদি $= (পখ^ম + ফঘ^ম + বচ^ম +$ ইত্যাদি$) য^ম$।

$\therefore \quad \frac{পক^ম + ফগ^ম + বঙ^ম + \text{ইত্যাদি}}{পখ^ম + ফঘ^ম + বচ^ম + \text{ইত্যাদি}} = য^ম$,

$\therefore \quad \left(\frac{পক^ম + ফগ^ম + বঙ^ম + \text{ইত্যাদি}}{পখ^ম + ফঘ^ম + বচ^ম + \text{ইত্যাদি}}\right)^{\frac{১}{ম}} = য = \frac{ক}{খ}$।

আবার (১) এর ন সংখ্যক সমীকরণগুলির গুণফল লইলে

কগঙ $= (খঘচ \quad) য^ন$,

$\therefore \quad \frac{কগঙ}{খঘচ} = য^ন = \left(\frac{ক}{খ}\right)^ন$।

$$\therefore \left(\frac{কগঙ}{খঘচ} \quad - \right)^{\frac{১}{ন}} = য = \frac{ক}{খ}।$$

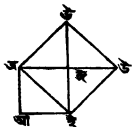
১৩৫। উপরে ১২৭ ধারায় বলা গিয়াছে, পূর্ব্বপদ, ক, পরপদ, খ'র কতগুণ বা কত ভাগ, ক খ এই অনুপাত তাহাই প্রকাশ করে, এবং

$$ক \quad খ = \frac{ক}{খ}।$$

কিন্তু অনেক স্থলে এরূপ ঘটে যে সেই 'কত গুণ' বা 'কত ভাগ' কোন নির্দ্দিষ্ট সসীম অখণ্ড বা খণ্ড সংখ্যা দ্বারা ঠিক প্রকাশ করা যায় না।

যথা, যদি অ আ ই ঈ একটি সমকোণী সমবাহু চতুর্ভুজ হয়, এবং তাহার কর্ণ অ ই'র উপর আর একটি সমকোণী সমবাহু চতুর্ভুজ অ ই উ ঊ অঙ্কিত করা যায়, তাহা হইলে (পাটীগণিতের ১১৩ ও ১২২ ধারা দ্রষ্টব্য)

অ আ ই ঈ'র ক্ষেত্র ফল = অ আ^{২}

অ ই উ ঊ'র $\quad$ = অ ই^{২}।

এবং জ্যামিতিতে সপ্রমাণ করা আছে, ও স্পষ্টই দেখা যাইতেছে,

$$অ ই উ ঊ = ২ \times অ আ ই ঈ।$$

$$\therefore \quad অ ই^{২} = ২ \times অ আ^{২},$$

$$\therefore \quad অ ই = \sqrt{২} \times অ আ।$$

$$\therefore \quad \frac{অ ই}{অ আ} = \sqrt{২}।$$

কিন্তু $\sqrt{২}$ কোন নির্দ্দিষ্ট সসীম অখণ্ড বা খণ্ড রাশি নহে, তবে ২এর বর্গমূল আকর্ষণ ক্রিয়া ক্রমশঃ চালাইলে লব্ধ বর্গমূলের দশমিক ভাগের ঘরের সংখ্যা বৃদ্ধি হইতে থাকিবে, এবং লব্ধ বর্গমূল প্রকৃত বর্গমূলের সন্নিহিত হইতে থাকিবে।

আরও দেখা যাইতেছে,

$$\frac{অউ}{অই} = \sqrt{২},$$

$$\therefore \quad \frac{অউ}{অই} = \frac{অই}{অআ}।$$

শিক্ষার্থীর এই কথাগুলি মনে রাখা আবশ্যক।

১৩৬। যদি দুইটি রাশি এরূপে সম্বন্ধ থাকে যে, তাহাদের একটির পরিবর্ত্তন ঘটিলে অপরটির এ প্রকার পরিবর্ত্তন ঘটে যে, তাহাদের পূর্ব্ব-পরিমাণদ্বয় ও পরিবর্ত্তিতপরিমাণদ্বয় এই চারিটি সর্ব্বদা সমানুপাতী থাকে, তাহা হইলে সেই রাশিদ্বয়কে **বিপরিণামী** বলে।

যদি সেই সমানুপাত যথাক্রমে হয়, তবে রাশিদ্বয়কে **যথাক্রমে** বিপরিণামী বলে। যদি তাহা বিপরীত ক্রমে হয়, তবে রাশিদ্বয়কে **বিপরীতক্রমে** বিপরিণামী বলে।

যথা, যদি ক ও খ কোন দ্রব্যের পরিমাণ ও তাহার মূল্য হয়, এবং সেই দ্রব্য যদি এরূপ হয় যে তাহার পরিমাণ বাড়িলে বা কমিলে তাহার মূল্য সেই অনুপাতে বাড়ে বা কমে, তাহা হইলে ক ও খ যথাক্রমে বিপরিণামী। এবং $ক_১$ ও $খ_১$ যদি ক ও খ'র একসঙ্গে পরিবর্ত্তিত পরিমাণ হয়, তাহা হইলে

$$\frac{ক}{খ} = \frac{ক_১}{খ_১}।$$

আবার যদি ক ও খ কোন নির্দ্দিষ্ট স্থান হইতে অপর একটি নির্দ্দিষ্ট স্থানে যাইতে, সমান গতিশীল যানের যাইবার বেগের ও যাইবার সময়ের পরিমাণ হয়, এবং $ক_১$ ও $খ_১$ তাহাদের একসঙ্গে পরিবর্ত্তিত পরিমাণ হয়, তাহা হইলে স্পষ্ট দেখা যাইতেছে, ক ও খ বিপরীত ক্রমে বিপরিণামী, অর্থাৎ ক বাড়িলে খ কমিবে ও ক কমিলে খ বাড়িবে। কারণ যাইবার গতির বেগ বাড়িলে যাইবার সময় সেই অনুপাতে কমিবে, এবং সেই গতির বেগ কমিলে যাইবার সময় সেই অনুপাতে বাড়িবে। এবং

$$\frac{ক}{খ} = \frac{খ_১}{ক_১}।$$

দুইটি রাশি, ক ও খ, যথাক্রমে বিপবিণামী হইলে, সেই সম্বন্ধ রাশিদ্বয়ের মধ্যে ∝ এই চিহ্ন অঙ্কিত কবিয়া প্রকাশ করা যায়,

যথা, ক ∝ খ।

এবং ক ও খ বিপরীতক্রমে বিপবিণামী হইলে সেই সম্বন্ধ প্রথম রাশি ও দ্বিতীয় রাশির অন্যোন্যক এই দুইটিব মধ্যে ∝ এই চিহ্ন অঙ্কিত করিয়া প্রকাশ করা যায়,

যথা, ক ∝ $\frac{১}{খ}$।

কারণ, ক যখন খ'র সহিত বিপরীতক্রমে সমানুপাতী, তখন ক বাড়িলে সেই অনুপাতে খ কমিবে অর্থাৎ $\frac{১}{খ}$ বাড়িবে, এবং ক কমিলে সেই অনুপাতে খ বাড়িবে অর্থাৎ $\frac{১}{খ}$ কমিবে। সুতরাং ক এবং $\frac{১}{খ}$ এরূপ স্থলে যথাক্রমে সমানুপাতী।

অতএব দেখা যাইতেছে ∝ এই চিহ্ন যথাক্রমে বিপবিণামের চিহ্ন, এবং ইহা কেবল যথাক্রমে বিপবিণামী বাশিদ্বয়েব মধ্যে অঙ্কিত হয়।

উপবে দ্রব্যের মূল্য ও পবিমাণ যথাক্রমে বিপরিণামী এই কথা বলিবার সময় আভাস দেওয়া হইয়াছে যে, তাহা সর্ব্বত্র না ঘটিতে পারে। বাস্তবিকও তাহা সর্ব্বত্র ঘটে না, এবং তাহাব কারণও আছে। যথা, এক খণ্ড একরতি হীরকের যে মূল্য, এক খণ্ড দশরতি হীবকেব মূল্য তাহাব দশগুণ নহে, তদপেক্ষা অনেক অধিক। এবং তাহার কারণ এই যে, বড় বড় হীরকখণ্ড অতি দুর্ল্ভ অথচ অতি সুন্দব, এবং ছোট ছোট হীবক খণ্ড একত্র করিয়া বড় হীরক খণ্ড প্রস্তুত কবা যায় না। কিন্তু স্বর্ণ সেরূপ নহে, এবং এক তোলা স্বর্ণেব যে মূল্য, দশতোলা স্বর্ণের মূল্য ঠিক তাহাব দশগুণ, কাবণ পৃথক্ পৃথক্ দশতোলা স্বর্ণ হইতে, ইচ্ছা কবিলে গলাইয়া একত্র করিয়া, একখণ্ড দশতোলা স্বর্ণ প্রস্তুত কবিতে পারা যায়।

১৩৭। যদি ক ∝ খ,

তাহা হইলে ক = নখ,

যথায় ন একটি *নিত্য* অর্থাৎ অপরিবর্ত্তনশীল রাশি।

কারণ, মনে কর $ক_১$ ও $খ_১$, ক ও খ'র সমসাময়িক পরিবর্ত্তিত পরিমাণ, তাহা হইলে $\frac{ক}{খ} = \frac{ক_১}{খ_১}$, অর্থাৎ $ক = \frac{ক_১}{খ_১} খ$।

এবং $\frac{ক_১}{খ_১}$-এর পরিমাণ সর্ব্বদাই সমান থাকিবে, অর্থাৎ ইহা একটি নিত্যরাশি।

$$\therefore\ ক = ন\,খ।$$

সেইরূপে দেখা যাইবে,

$$যদি\ ক \propto \frac{১}{খ},$$

তাহা হইলে $ক = ন \times \frac{১}{খ} = \frac{ন}{খ}$।

১৩৮। যদি $ক \propto খ$, এবং $খ \propto গ$,

তাহা হইলে $ক \propto গ$।

কারণ, যখন $ক \propto খ$, তখন $ক = ন\,খ$,

এবং যখন $খ \propto গ$, তখন $খ = প\,গ$,

$\therefore$ $ক = ন\,প\,গ$।

এবং ন ও প নিত্যরাশি,

$\therefore$ $ক \propto গ$।

১৩৯। যদি $ক \propto গ$, এবং $খ \propto গ$,

তাহা হইলে $(ক \pm খ) \propto গ$, এবং $\sqrt{কখ} \propto গ$।

কারণ, মনে কর $ক = নগ$, $খ = পগ$,

$\therefore$ $ক \pm খ = (ন \pm প)গ$

ও $\sqrt{কখ} = \sqrt{নপগ^২} = \sqrt{নপ} \times গ$।

এবং $ন \pm প$ ও $\sqrt{নপ}$ উভয়ই নিত্যরাশি।

১৪০। যদি $ক \propto খগ$,

তাহা হইলে $খ \propto \frac{ক}{গ}$, $গ \propto \frac{ক}{খ}$।

কারণ, মনে কর ক = নখগ,

তাহা হইলে $\quad$ খ $= \frac{\text{ক}}{\text{নগ}} = \frac{১}{\text{ন}} \times \frac{\text{ক}}{\text{গ}}$,

এবং $\quad$ গ $= \frac{\text{ক}}{\text{নখ}} = \frac{১}{\text{ন}} \times \frac{\text{ক}}{\text{খ}}$।

১৪১। যদি ক ∝ খ যখন গ অপরিবর্ত্তনশীল থাকে,
এবং ক ∝ গ যখন খ অপরিবর্ত্তনশীল থাকে,
তাহা হইলে $\quad$ ক ∝ খগ যখন খ ও গ উভয়েই পরিবর্ত্তিত হয়।

কারণ, মনে কর প্রথমে গ অপরিবর্ত্তিত রহিল এবং খ যখন $\text{খ}_১$ হইল, তখন ক, ক´ হইল, এবং পরে গ যখন $\text{গ}_১$ হইল তখন ক´, $\text{ক}_১$ হইল।

তাহা হইলে $\frac{\text{ক}}{\text{ক´}} = \frac{\text{খ}}{\text{খ}_১}$, এবং $\frac{\text{ক´}}{\text{ক}_১} = \frac{\text{গ}}{\text{গ}_১}$,

$\therefore \frac{\text{ক}}{\text{ক´}} \times \frac{\text{ক´}}{\text{ক}_১} = \frac{\text{খ}}{\text{খ}_১} \times \frac{\text{গ}}{\text{গ}_১}$, অর্থাৎ $\frac{\text{ক}}{\text{ক}_১} = \frac{\text{খগ}}{\text{খ}_১\text{গ}_১}$।

$\therefore$ $\quad$ ক ∝ খগ।

এই শেষোক্ত নিয়মের একটি উদাহরণ দেওয়া যাউক।

মনে কর গ সংখ্যক লোক খ সংখ্যক দিনে ক সংখ্যক মণ খাদ্য আহার করে। তাহা হইলে লোকসংখ্যা গ অপরিবর্ত্তিত থাকিলে, এবং কেবল দিনের সংখ্যা খ পরিবর্ত্তিত হইলে, খাদ্যের পরিমাণ ক, দিনের সংখ্যা খ'র বিপরিণামী হইবে। এবং দিনের সংখ্যা অপরিবর্ত্তিত থাকিলে, খাদ্যের পরিমাণ ক, লোকসংখ্যা গ'র বিপরিণামী হইবে। আর যখন লোকের সংখ্যা ও দিনের সংখ্যা উভয়ই পরিবর্ত্তিত হয়, তখন খাদ্যের পরিমাণ ক, খ ও গ'র গুণফলের বিপরিণামী হইবে। অর্থাৎ, লোক সংখ্যা ঠিক থাকিয়া দিন খ দ্বিগুণ অর্থাৎ ২ খ হইলে, ক দ্বিগুণ অর্থাৎ ২ক হইবে, এবং তাহার উপর যদি লোকসংখ্যা তিনগুণ অর্থাৎ ৩গ হয়, তাহা হইলে খাদ্যের পরিমাণ ক, ৩×২ক অর্থাৎ ৬ক হইবে।

৮। উদাহরণমালা।

১। (১) কোন্ সংখ্যা ১ ৪ এই অনুপাতের উভয় পদে যোগ করিলে অনুপাত ৩ ৪ হইবে?

(২) যদি স ষ এই অনুপাত ক খ এই অনুপাতের লঘিষ্ঠ আকার হয়, তবে,

$$\frac{স+১}{ষ+১} > \frac{ক+১}{খ+১}, \text{ যদি } খ > ক।$$

(৩) যদি $৬\,স^২ + ৬ষ^২ = ১৩\,সষ$,

তবে স ষ এই অনুপাতের পরিমাণ কত?

২। যদি ক খ গ ঘ, তাহা হইলে,

(১) $\frac{ক^২}{খ^২} + \frac{গ^২}{ঘ^২} = ২\,\frac{কগ}{খঘ}$।

(২) $\frac{(ক-খ)(ক-গ)}{ক} = (ক+গ)-(খ+গ)$।

(৩) $\frac{ক^২}{খ}$ $\frac{গ^২}{ঘ}$ এই অনুপাত $\frac{ক}{খ^২}$ $\frac{গ}{ঘ^২}$ এই অনুপাতের বিপরীত অনুপাত।

(৪) $ক^২ঘ - খগ^২ = কগ\,(খ-ঘ)$।

৩। (১) যদি $স+ষ \propto স-ষ$, তবে $স^২+ষ^২ \propto সষ$।

(২) যদি $স+ষ \propto শ$ যখন ষ অপরিবর্ত্তনশীল,

এবং $স+শ \propto ষ$ যখন শ অপরিবর্ত্তনশীল,

তাহা হইলে $স+ষ+শ \propto ষশ$।

(৩) যদি $স \propto \frac{১}{ষ}$, এবং যখন $স=৬$, $ষ=৫$,

তাহা হইলে যখন $স=১৫$, তখন ষ কত?

নবম অধ্যায়।

সমান্তর শ্রেঢী, সমগুণ শ্রেঢ়ী, লয় শ্রেঢ়ী।

১৪২। যদি কোন রাশিশ্রেণি এরূপ হয় যে, শ্রেণির প্রত্যেক রাশির সহিত তাহার পরবর্ত্তী রাশির সম্বন্ধ কোন একটি নির্দ্দিষ্ট নিয়মাধীন, তাহা হইলে সেই রাশিশ্রেণিকে **শ্রেঢ়ী** বলে।

যথা সাধারণ সংখ্যাশ্রেণি, ১, ২, ৩, ৪
একটি শ্রেঢী, কারণ, এই শ্রেণির প্রত্যেক সংখ্যা তাহার পরবর্ত্তী সংখ্যা অপেক্ষা এক কম।

আবার যুগ্মরাশি শ্রেণি ২, ৪, ৬
একটি শ্রেঢী, এবং তাহাতে প্রত্যেক রাশি পরবর্ত্তী রাশি অপেক্ষা দুই কম।

শ্রেঢী নানাবিধ। তন্মধ্যে সমান্তর শ্রেঢী, সমগুণ শ্রেঢী, ও লয় শ্রেঢী, এই ত্রিবিধ শ্রেঢীর বিষয় এই অধ্যায়ে আলোচিত হইবে।

১৪৩। যে প্রকার শ্রেঢীতে তাহার প্রত্যেক পদ ও তৎপরবর্ত্তী পদের অন্তর সমান, তাহাকে **সমান্তর শ্রেঢ়ী** বলে।

যথা ১, ২, ৩, ৪ (১)
৩, ৫, ৭, ৯ (২)
ক, ক+খ, ক+২খ, ক+৩খ (৩)

সমান্তর শ্রেঢীর কোন দুই পর পর পদের অন্তরকে **সাধারণ অন্তর** বলে।

যথা উপরের (১) শ্রেঢীতে সাধারণ অন্তর ১,
(২) ২,
(৩) খ।

১৪৪। যদি কোন সমান্তব শ্রেঢীব প্রথম পদ ক, ও সাধারণ অন্তর অ ও পদেব সংখ্যা ন হয়, তাহা হইলে

তাহাব দ্বিতীয় পদ $=$ ক $+$ অ,

তৃতীয় $=$ ক $+$ ২অ,

চতুর্থ $=$ ক $+$ ৩অ,

বতম $=$ ক $+$ (ব $-$ ১)অ,

শেষ $=$ ক $+$ (ন $-$ ১)অ।

১৪৫। এখন দেখা যাউক যদি এই সমান্তব শ্রেঢীব ন পদেব সমষ্টি স হয়, তবে স'ব মূল্য কত।

$$\text{স} = \text{ক} \quad + (\text{ক} + \text{অ}) + \quad + \{\text{ক} + (\text{ন} - ১)\text{অ}\},$$

এবং শ্রেঢী বিপবীত ক্রমে লিখিলে

$$\text{স} = \{\text{ক} + (\text{ন} - ১)\text{অ}\} + \{\text{ক} + (\text{ন} - ২)\text{অ}\} + \quad + \text{ক}।$$

∴ যোগ কবিলে,

$$২\text{স} = \{২\text{ক} + (\text{ন} - ১)\text{অ}\} + \{২\text{ক} + (\text{ন} - ১)\text{অ}\} + \quad + \{২\text{ক} + (\text{ন} - ১)\text{অ}\}$$

$$= \text{ন} \times \{২\text{ক} + (\text{ন} - ১)\text{অ}\}।$$

$$\therefore \quad \text{স} = \frac{\text{ন}}{২}\{২\text{ক} + (\text{ন} - ১)\text{অ}\} \qquad (১)$$

যদি শেষ পদকে ল বলা যায়, তাহা হইলে

$$\text{ল} = \text{ক} + (\text{ন} - ১)\text{অ} \qquad (২)$$

$$\therefore \quad \text{স} = \frac{\text{ন}}{২}\{\text{ক} + \text{ক} + (\text{ন} - ১)\text{অ}\}$$

$$= \frac{\text{ন}}{২}(\text{ক} + \text{ল}) \qquad (৩)$$

এবং রতমপদ $\text{প} = \text{ক} + (\text{র} - ১)\text{অ}$ (৪)

১৪৬। যে কোন সমান্তব শ্রেঢীব ক, অ, ন, স, ল, প, র এই সাতটির মধ্যে কোন তিনটি জানা থাকিলে, অপব চাবিটি জানা যায়। আর তাহা জানিবার নিমিত্ত উপরের (১) হইতে (৮) সমীকরণই যথেষ্ট।

এই সংক্রান্ত দুইটি বিশেষ প্রশ্নের সমাধান প্রণালী নিম্নে প্রদর্শিত হইতেছে।

১৪৭। **প্রথমতঃ** ক, অ, ও সএব মূল্য জানা থাকিলে ন'র মূল্য নির্ণয় করিবার প্রণালী।

$$স=\frac{ন}{২}\{২ক+(ন-১)অ\}$$

[১৪৫ ধারার (১) সমীকরণ]

$$\therefore\quad অন^২+(২ক-অ)ন-২স=০$$

$$\therefore\quad ন=\frac{অ-২ক\pm\sqrt{(২ক-অ)^২+৮অস}}{২অ}।$$

দেখা যাইতেছে ন'র দুটি মূল্য পাওয়া যায়। অনেক স্থলে সে দুইটিই গ্রহণ করা যায়।

যথা, মনে কর ক = ৯, অ = −২, স = ১৬,

তাহা হইলে ন = ২ বা ৮।

এস্থলে শ্রেঢী ৯, ৭, ৫, ৩, ১, −১, −৩, −৫ ইত্যাদি,

এবং এই শ্রেঢীর প্রথম ২ পদ ও প্রথম ৯ পদ উভয়েরই সমষ্টি = ১৬।

সুতরাং ন = ২ ও ন = ৮ উভয় মূল্যই গ্রহণযোগ্য।

দ্বিতীয়তঃ কোন দুইটি পদ জানা থাকিলে শ্রেঢীর প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তর জানিবার প্রণালী।

মনে কর রতম পদ = প,

যতম পদ = ফ।

তাহা হইলে $প=ক+(র-১)অ$,

$ফ=ক+(য-১)অ$।

$$\therefore\quad প-ফ=(র-য)অ,$$

$$\therefore\quad অ=\frac{প-ফ}{র-য}।$$

এবং $ক=প-(র-১)অ=প-(র-১)\times\frac{প-ফ}{র-য}$

$$=\frac{ফ(র-১)-প(য-১)}{র-য}।$$

১৪৮। কোন দুইটি রাশি ক ও খ'র মধ্যে, যদি এমন একটি রাশি গ সন্নিবেশিত করা যায় যে, ক, গ, খ এই তিনটিতে একটি সমান্তর শ্রেঢ়ী হয়, তাহা হইলে সেই সন্নিবিষ্ট রাশিকে অপর রাশিদ্বয়ের **সমান্তর মধ্যম** বলে।

এস্থলে ক − গ = গ − খ,

$$\therefore \quad \text{গ} = \frac{\text{ক} + \text{খ}}{২}।$$

অর্থাৎ, কোন দুই রাশির সমান্তর মধ্যম সেই রাশিদ্বয়ের যোগফলের অর্দ্ধেক।

কোন দুটি রাশি ক ও খ'র মধ্যে, যদি ন সংখ্যক এরূপ রাশি সন্নিবেশিত করা যায় যে, সেই সমস্ত অর্থাৎ (ন+২) সংখ্যক রাশিগুলি একটি সমান্তর শ্রেঢ়ী হইবে, তাহা হইলে অ যদি সাধারণ অন্তর হয়, তবে

$$\text{খ} = \text{ক} + (\text{ন} + ১)\,\text{অ}।$$

[১৪৫ ধারার (২) সমীকরণ]

অতএব $$\text{অ} = \frac{\text{খ} - \text{ক}}{\text{ন} + ১}।$$

এবং অ জানা গেলে সমস্ত শ্রেঢ়ীই জানা গেল।

১৪৯। এখন সমান্তর শ্রেঢ়ী সংক্রান্ত আর তিনটি প্রশ্নের সমাধান প্রণালী প্রদর্শিত হইবে।

(১) সাধারণ সংখ্যা শ্রেণি ১,২,৩,৪ ইহার ন সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

মনে কর সমষ্টি স।

তাহা হইলে স = ১ + ২ + ৩ + ... + ন

$$= \frac{\text{ন}}{২}\{২ + (\text{ন} - ১) \times ১\}$$

$$= \frac{\text{ন}\,(\text{ন} + ১)}{২}।$$

(২) সাধারণ সংখ্যাশ্রেণির প্রথম ন সংখক অযুগ্ম রাশির সমষ্টি কত?

এস্থলে প্রথম পদ = ১,

২য় = ১ + ২ = ৩,

নতম = ১ + (ন − ১)২ = ২ ন − ১।

$\therefore$ স = ১ + ৩ + ৫ + (২ন − ১)

$= \frac{ন}{২}\{২ + (ন − ১) \times ২\}$

= ন²।

(৩) সাধারণ সংখ্যাশ্রেণির প্রথম ন সংখ্যক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি কত?
মনে কর স = ১² + ২² + ৩² + + ন²।
জানা আছে যে,

ন³ − (ন − ১)³ = ৩ন² − ৩ন + ১
(ন − ১)³ − (ন − ২)³ = ৩(ন − ১)² − ৩(ন − ১) + ১
(ন − ১)³ − (ন − ৩)³ = ৩(ন − ২)² − ৩(ন − ২) + ১
৩³ − ২³ = ৩·৩² − ৩·৩ + ১
২³ − ১³ = ৩·২² − ৩·২ + ১
১³ − ০³ = ৩·১² − ৩·১ + ১

যোগ দ্বারা ন³ = ৩ × (১² + ২² + ৩² + + ন²)
− ৩ × (১ + ২ + ৩ + + ন) + ন

$= ৩ \times স − ৩ \times \frac{ন(ন + ১)}{২} + ন।$

$\therefore$ $৩স = ন³ + ৩ \times \frac{ন(ন + ১)}{২} − ন$

$= \frac{ন \times (২ন² + ৩ন + ১)}{২}$

$= \frac{ন(ন + ১)(২ন + ১)}{২}।$

$\therefore$ $স = \frac{ন(ন + ১)(২ন + ১)}{৬}।$

১৫০। যে শ্রেণীর প্রত্যেক পদকে কোন একটি নির্দ্দিষ্ট রাশি দ্বারা গুণ করিলে তাহার পরবর্ত্তী পদ পাওয়া যায়, তাহাকে **সমগুণ শ্রেণী** বলে। এবং সেই নির্দ্দিষ্ট গুণককে শ্রেণীর **সাধারণ অনুপাত** বলে।

যথা ১, ২, ৪, ৮ ইত্যাদি
৫, ১৫, ৪৫, ১৩৫ ইত্যাদি,
ক, কর, কর², কর³ ইত্যাদি,

সমগুণ শ্রেঢ়ী, এবং

১ম শ্রেঢ়ীর সাধারণ অনুপাত ২,
২য় " ৩,
৩য় " র।

১৫১। যদি কোন সমগুণ শ্রেঢ়ীর প্রথম পদ ক, সাধারণ অনুপাত র, এবং পদের সংখ্যা ন, হয়, তাহা হইলে তাহার

$$\text{শেষ পদ } ল = কর^{ন-১}$$

$$\text{এবং যতম পদ } ফ = কর^{য-১}।$$

১৫২। এখন দেখা যাউক সমগুণ শ্রেঢ়ীর ন সংখ্যক পদের সমষ্টি কত। মনে কর সেই সমষ্টি = স।

তাহা হইলে,

$$স = ক + কর + কর^২ + \quad + কর^{ন-২} + কর^{ন-১},$$

$$\text{এবং}\quad সর = \quad কর + কর^২ + \quad + কর^{ন-২} + কর^{ন-১} + কর^{ন}।$$

∴ বিয়োগ দ্বারা

$$স(র-১) = কর^{ন} - ক = ক(র^{ন} - ১)।$$

$$স = \frac{ক(র^{ন}-১)}{র-১}। \qquad (১)$$

যদি শেষ পদ ল হয়, তবে

$$ল = কর^{ন-১} \qquad (২)$$

১৫৩। যদি র < ১ হয়, তাহা হইলে উপরের (১) সমীকরণ এই আকার ধারণ করে, যথা

$$স = \frac{ক(১-র^{ন})}{১-র} \qquad (১$$

এরূপ স্থলে ন যত বড হইবে, $র^{ন}$ তত ছোট হইবে, যথা র $=\frac{১}{২}$ হইলে, $ব^{২}=\frac{১}{৪}$, $ব^{৩}=\frac{১}{৮}$, ইত্যাদি। এবং ন যদি অতি বৃহৎ হয় তাহা হইলে $ব^{ন}$ অতি ক্ষুদ্র হইবে। আর ন’ব বৃহত্ত্বের যেমন সীমা নাই, $ব^{ন}$’ব ক্ষুদ্রত্বেরও তেমনই সীমা নাই। এই কথা সঙ্ক্ষেপে এইরূপে বলা যাইতে পারে,

ন যখন $=\infty$ অনন্ত,

$ব^{ন}$ তখন $=০$ শূন্য।

এবং শ্রেঢী অসীম মনে করিলে, তাহার অনন্ত পদ সমূহের সমষ্টি

$$স=\frac{ক(১-০)}{১-ব}=\frac{ক}{১-ব} \qquad (১)$$

পশ্চাৎ প্রদর্শিত উদাহরণ দ্বারা এই কথা স্পষ্টরূপে বুঝা যাইবে।

উদাহরণ।

$১, \frac{১}{২}, \frac{১}{৪}, \frac{১}{৮},$

এই অসীম শ্রেঢীর পদ সমূহের সমষ্টি কত ?

এ স্থলে $ক=১$, $ব=\frac{১}{২}$,

$$\therefore\ স=\frac{১}{১-\frac{১}{২}}=\frac{১}{\frac{১}{২}}=২।$$

অর্থাৎ $১+\frac{১}{২}+\frac{১}{৪}+\frac{১}{৮}+ \qquad\qquad =২।$

এই কথাটি নিম্নলিখিতরূপে ভাবিলে আরও স্পষ্ট বুঝা যাইবে।

অ $\qquad$ $অ_১$ $\qquad$ $অ_২$ $\quad$ $অ_৩$ $\quad$ $অ_৪$ $\quad$ ই

মনে কর রেখা অ $অ_১=১$ইঞ্চ $=অ_১ই$,

$অ_১অ_২=\frac{১}{২}অ_১ই$, $অ_২অ_৩=\frac{১}{২}\times\frac{১}{২}অ_১ই=\frac{১}{৪}অ_১ই$,

$অ_৩অ_৪=\frac{১}{২}\times\frac{১}{২}\times\frac{১}{২}অ_১ই=\frac{১}{৮}অ_১ই$, ইত্যাদি।

তাহা হইলে, $অ_১ই$’র অংশগুলি ক্রমে ক্ষুদ্র হইতে ক্ষুদ্রতর হইয়া আসিবে, এবং তাহাদের সমষ্টি সমস্ত $অ_১ই$’র সমান হইবে।

অর্থাৎ $অ\,অ_১ + অ_১ অ_২ + অ_২ অ_৩ + অ_৩ অ_৪ +$

$= অ\,অ_১ (১ + \frac{১}{২} + \frac{১}{৪} + \frac{১}{৮} + \qquad)$

$= অ\,অ_১ + অ_১$ ই

$= অ\,অ_১ \times ২ ।$

১৫৪। পৌনঃপুনিক দশমিক এক প্রকার অসীম সমগুণ শ্রেঢ়ী, যাহার সাধারণ অনুপাত একের ন্যূন, এবং পৌনঃপুনিকের মূল্য অসীম সমগুণ শ্রেঢ়ীর পদ সমষ্টি।

যথা, $\dot{৩} = ৩৩৩৩$

$$= \frac{৩}{১০} + \frac{৩}{১০^২} + \frac{৩}{১০^৩} + \frac{৩}{১০^৪} + \cdots \quad \cdots$$

$$= \frac{৩}{১০} \{ ১ + \frac{১}{১০} + \frac{১}{১০^২} + \frac{১}{১০^৩} + \qquad \}$$

$$= \frac{৩}{১০} \times \frac{১}{১ - \frac{১}{১০}} = \frac{৩}{১০} \times \frac{১০}{৯}$$

$$= \frac{৩}{৯} = \frac{১}{৩} ।$$

সাধারণতঃ মনে কর একটি দশমিক প্রথম দশমিকের ঘর হইতেই পৌনঃপুনিক, এবং তাহার এক একটি পৌনঃপুনিক ভাগে প সংখ্যক অঙ্ক আছে, ও সেই অঙ্কগুলি লইয়া দশমিক বিন্দুর প্রতি লক্ষ্য না রাখিলে যে রাশি হয় তাহা র। আর মনে কর সেই পৌনঃপুনিক দশমিকের মূল্য দ। তাহা হইলে

$$দ = \frac{র}{১০^প} + \frac{র}{১০^{২প}} + \frac{র}{১০^{৩প}} + \frac{র}{১০^{৪প}} +$$

$$= \frac{র}{১০^প} \left\{ ১ + \frac{১}{১০^প} + \frac{১}{১০^{২প}} + \frac{১}{১০^{৩প}} + \qquad \cdots \right\}$$

$$= \frac{র}{১০^প} \times \frac{১}{১ - \frac{১}{১০^প}} = \frac{র}{১০^প - ১}$$

$$= \frac{র}{৯৯৯ \;(প\ সংখ্যক)} ।$$

১৫৫। চক্রবৃদ্ধির নিয়মে টাকার সুদ চলিলে, বর্ষে বর্ষে মোট সুদ আসলের বৃদ্ধি, সমগুণশ্রেণীব ঠিক পর পর পদের বৃদ্ধির ন্যায়।

মনে কর, আসল = অ,

সুদেব হাব বার্ষিক শতকবা = হ,

তাহা হইলে ১ম, ২য়, ৩য় ইত্যাদি বর্ষান্তে মোট সুদ আসল

$$= অ\left(১+\frac{হ}{১০০}\right),\ অ\left(১+\frac{হ}{১০০}\right)^২,\ অ\left(১+\frac{হ}{১০০}\right)^৩,\ ইত্যাদি।$$

এই সমগুণ শ্রেণীর সাধাবণ অনুপাত $=\left(১+\frac{হ}{১০০}\right)$।

(পাটীগণিতেব ১৫৭ ধারা দ্রষ্টব্য)।

১৫৬। কোন দুইটি বাশি ক ও খ'ব মধ্যে যদি এমন একটি বাশি গ সন্নিবেশিত কবা যায় যে, ক, গ, খ, এই তিনটিতে একটি সমগুণ শ্রেণী হয়, তাহা হইলে সেই সন্নিবিষ্ট বাশি গ'কে অপব বাশিদ্বয়েব **সমগুণ মধ্যম** বলে।

এস্থলে $\frac{ক}{গ}=\frac{গ}{খ}$,

$\therefore$ $গ^২ = কখ$,

$\therefore$ $গ = \sqrt{গখ}$।

অর্থাৎ, কোন দুই রাশিব সমগুণ মধ্যম তাহাদেব গুণফলেব বর্গমূল।

১৫৭। কোন দুইটি বাশি ক ও খ'র মধ্যে যদি ন সংখ্যক এরূপ রাশি সন্নিবেশিত কবা যায় যে, সেই সমস্ত অর্থাৎ (ন+২) সংখ্যক বাশিগুলি একটি সমগুণ শ্রেণী হইবে, তাহা হইলে যদি র সাধাবণ অনুপাত হয় তবে

$$খ = কব^{ন+১}।$$

[১৫২ ধাবাব (২) সমীকবণ]

$$অতএব\ ব = \left(\frac{খ}{ক}\right)^{\frac{১}{ন+১}}।$$

১৫৮। সমগুণ শ্রেঢীর সাধারণ অনুপাত একের ন্যূন হইলে, সেরূপ শ্রেঢীর অসীম পদসমষ্টির সসীম মূল্য আছে, তাহা উপরে ১৫৩ ধারায় দেখা গিয়াছে। সাধারণ অনুপাত একের অধিক হইলে, শ্রেঢীর অসীম পদ সমষ্টিও অসীম হইবে, এবং প্রথম পদ হইতে যতই অগ্রসর হওয়া যাইবে অর্থাৎ অধিক সংখ্যক পদ লওয়া যাইবে, ততই প্রত্যেক পদ ও পদ সমষ্টি অতি দ্রুত গতিতে বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে। তাহার কয়েকটি উদাহরণ নিয়ে দেওয়া যাইতেছে।

(১) উদাহরণ। প্রথমে এক দানা চিঁড়ে লও, তাহার পর ১ × ২ অর্থাৎ ২ দানা, তাহার পর ২ × ২ অর্থাৎ ৪ দানা, তৎপরে ৪ × ২ অর্থাৎ ৮ দানা, এরূপে ক্রমশঃ ২২ বার পর্য্যন্ত লইয়া যতগুলি চিঁড়ে হয় তাহা একত্র কর। তাহাতে যতগুলি চিঁড়ে হইল তাহা ভক্ষণ করিতে পারিবে?

এই প্রশ্নকে সচরাচর চিঁড়ের বাইশ ফের সমস্যা বলে। এবং না ভাবিয়া অনেকে ইহার উত্তরে হাঁ বলিবে। কিন্তু গণনা করিয়া দেখিলেই বুঝা যাইবে, এই পরিমাণ চিপিটক অপর লোকের কথা দূরে থাকুক স্বয়ং বৃকোদরও ভক্ষণ করিতে পারিতেন না।

কারণ, চিঁড়ার সংখ্যা যদি স হয়,

$$স = ১ + ২ + ২^২ + ২^৩ + \quad + ২^{২১}$$

$$= \frac{১(২^{২২} - ১)}{২ - ১} = ২^{২২} - ১ = ৪১৯৪৩০৩।$$

ওজন করিয়া দেখা গিয়াছে ১ তোলায় ৬৪৮ দানা চিঁড়ে থাকে। তাহা হইলে ৪১৯৫৩০৩ দানাতে অন্যূন ২ মণ চিঁড়ে হইবে।

(২) উদাহরণ। কোন সম্ভ্রান্ত অশ্বারোহীর একটি আদরের অশ্ব ছিল। তাহার নালবন্দি ভালরূপে যাহাতে হয় তন্নিমিত্ত তিনি লোকের অনুসন্ধান করায়, একজন চতুর নালবন্দ আসিয়া বলিল, সে উত্তম রূপে নালবন্দি করিয়া দিবে, কিন্তু তাহার পরিশ্রমের ও নালের মূল্য, ৬ খানি নালের ৬টি হিসাবে ২৪টি পেরেকের প্রথম পেরেকের জন্য ১ পয়সা, দ্বিতীয় পেরেকের জন্য ১ × ২ অর্থাৎ ২ পয়সা, তৃতীয় পেরেকের জন্য ২ × ২ অর্থাৎ ৪ পয়সা, চতুর্থ পেরেকের জন্য ৪ × ২ অর্থাৎ ৮ পয়সা, এই হিসাবে দিতে হইবে। অশ্বারোহী না ভাবিয়া তাহাতেই সম্মত হয়েন। তাঁহাকে কত টাকা দিতে হইবে?

মনে কর পয়সার সংখ্যা স।

তাহা হইলে $স = ১ + ২ + ২^{২} + ২^{৩} + \quad + ২^{২৩}$

$$= \frac{২^{২৪} - ১}{২ - ১} = ২^{২৪} - ১$$

$$= ১৬৭৭৭২১৫ \text{ পয়সা।}$$

∴ নালবন্দের খরচ = ২৬২১৪৩ টাকা ১৫ আনা ৩ পয়সা।

সেই আদবের অশ্বের মূল্যও এত টাকা হইতে পারে না।

(৩) উদাহরণ। এক জন লোভী ও চতুর ভূস্বামী এক বিঘা উর্ব্বরা গমের জমি বিলি করিবার সময় এই নিয়মে খাজানা চাহেন যে, প্রথম সপ্তাহে ১ দানা গম, দ্বিতীয়ে ১ × ২ অর্থাৎ ২ দানা, তৃতীয়ে ২ × ২ অর্থাৎ ৪ দানা, চতুর্থে ৪ × ২ অর্থাৎ ৮ দানা, এই হিসাবে, বৎসরে ৫২ সপ্তাহ থাকায়, ৫২ দফা গম দিতে হইবে। একজন অবোধ প্রজা না বুঝিয়া তাহাই দিতে সম্মত হয়। তাহাকে বৎসরে কত খাজানা দিতে হইবে?

মনে কর গমের দানার সংখ্যা স।

তাহা হইলে $স = ১ + ২ + ২^{২} + ২^{৩} + \quad + ২^{৫১}$

$$= \frac{২^{৫২} - ১}{১ - ১} = ২^{৫২} - ১$$

$$= ১১২৫৮৯৯৯০৬৮৪২৬২৩ \text{।}$$

ওজন করিয়া দেখা গিয়াছে ১ তোলায় ২১৬ দানা গম থাকে। অতএব উক্ত সংখ্যক গমের দানা ওজনে ৫২১২৯৯৫৬৮৭১৫ তোলা অর্থাৎ ১৬২৮৯৩৬১১৮ মণ। সুতরাং গম ১ টাকা মণ ধরিলে, ১ বিঘা জমির খাজানা ১৬২৮৯০৬১১৮ টাকা হইবে।

(৪) উদাহরণ। কথিত আছে, এক জন সন্ন্যাসী চতুরঙ্গ অর্থাৎ সতরঞ্চ খেলা সৃষ্টি করিয়া, তাহা এক রাজাকে শিখাইয়া দেওয়ায়, রাজা তুষ্ট হইয়া তাঁহাকে পারিতোষিক প্রার্থনা করিতে বলেন। সন্ন্যাসী প্রথমে কিছু লইতে অস্বীকার করিয়া পরে রাজার নিতান্ত অনুরোধে এই পারিতোষিক চাহে যে, সতরঞ্চ খেলার ভূমির প্রথম ঘরে তাহাকে ১ দানা চাউল, দ্বিতীয় ঘরে ১ × ২ অর্থাৎ ২ দানা, তৃতীয় ঘরে ২ × ২ অর্থাৎ ৪ দানা, এইরূপে ৬৪ ঘর পর্য্যন্ত

দেওয়া হউক। রাজা ইহাতে যৎসামান্য পরিমাণ তণ্ডুল হইবে মনে করিয়া, সন্ন্যাসী বিদ্রূপ করিতেছে ভাবিয়া বিবক্তি প্রকাশ করেন। কিন্তু তাঁহার সুবিজ্ঞ মন্ত্রী তাঁহাকে বুঝাইয়া দেন যে সন্ন্যাসী যাহা চাহিতেছে তাহা রাজভাণ্ডারে নাই। 'তণ্ডুলের পরিমাণ নির্ণয় কব।

মনে কর তণ্ডুলের সংখ্যা স।

তাহা হইলে $স = ১ + ২ + ২^{২} + ২^{৩} + \quad + ২^{৬৩}$

$$= \frac{২^{৬৪} - ১}{২ - ১} = ২^{৬৪} - ১।$$

ওজন কবিয়া দেখা গিয়াছে ১ তোলায় ৭২০ টির অধিক তণ্ডুল থাকে না। অতএব উক্ত সংখ্যক তণ্ডুলেব ওজন

২০০১৫৯৯৮৩৩৯৪২ মণেব ন্যূন হইবে না।

এত তণ্ডুল কোন বাজাব ভাণ্ডাবেই থাকিতে পারে না।

১৫৯। যে প্রকাব শ্রেঢীব পদেব অন্যোন্যকগুলি সমান্তব শ্রেঢীতে আবদ্ধ, তাহাকে লয় শ্রেঢী বলে।

যথা, $১, \frac{১}{২}, \frac{১}{৩}, \frac{১}{৪}, \frac{১}{৫}$

$১, \frac{১}{৩}, \frac{১}{৫}, \frac{১}{৭}, \frac{১}{৯}$

লয় শ্রেঢী, কাবণ,

১,২,৩,৪,৫

১,৩,৫,৭,৯

সমান্তব শ্রেঢী।

সাধাবণতঃ $ক_{১}, ক_{২}, ক_{৩}$

লয় শ্রেঢী হইবে, যদি

$\frac{১}{ক_{১}}, \frac{১}{ক_{২}}, \frac{১}{ক_{৩}}$

সমান্তর শ্রেঢী হয়।

সমান্তব শ্রেঢীব ও সমগুণ শ্রেঢীব নামেব সার্থকতা সহজেই বুঝা যায়, কেন না উক্ত নামদ্বয় তত্তৎপ্রকাব শ্রেঢীব লক্ষণানুযায়ী, কিন্তু লয় শ্রেঢীব নাম কেন এরূপ হইল তাহা তত সহজে বুঝা যায় না। এই প্রকাব শ্রেঢী

এই নামে অভিহিত হইবার হেতু এই যে, এক পদার্থে নির্ম্মিত এক ভারে টানা তিনটি তারের দৈর্ঘ্য, ১, $\frac{১}{২}$, $\frac{১}{৩}$ এই অনুপাতে যদি থাকে, তাহা হইলে সেই তারত্রয় ধ্বনিত হইলে তাহাদের স্বর **লয়সঙ্গত** ও সুশ্রাব্য হয়।

১৬০। যদি ক,গ,খ, তিনটি রাশি লয় শ্রেঢার পর পর পদত্রয় হয়, তবে গকে ক ও খ'র **লয় মধ্যম** বলে।

$$\text{এবং}\quad \frac{১}{খ}-\frac{১}{গ}=\frac{১}{গ}-\frac{১}{ক},$$

$$\therefore\quad (গ-খ)\times কগ=(ক-গ)খগ,$$

$$\therefore\quad ক(গ-খ)\quad =খ(ক-গ)$$

$$\therefore\quad ক\;খ\quad ক-গ\;\; গ-খ।$$

$$\text{এবং}\quad \frac{২}{গ}=\frac{১}{ক}+\frac{১}{খ},\quad \therefore গ=\frac{ক+খ}{২কখ}।$$

১৬১। লয় শ্রেঢী সম্বন্ধীয় অনেক প্রশ্নের সমাধান সমান্তর শ্রেঢী সম্বন্ধীয় প্রশ্নসমাধানের উপর নির্ভর করে।

যথা, ক ও খ'র মধ্যে যদি ন সংখ্যক এমত রাশি সন্নিবেশিত করিতে হয় যে, তাহারা সমস্ত লয় শ্রেঢীর পদ হইবে, তাহা হইলে অগ্রে $\frac{১}{ক}$ ও $\frac{১}{খ}$'র মধ্যে ন সংখ্যক এরূপ পদ সন্নিবেশিত করিতে হইবে যে, তাহারা সমান্তর শ্রেঢীর পদ হইবে, এবং তৎপরে তাহাদের অন্যোন্যক পদ লইলেই লয় শ্রেঢীর পদগুলি পাওয়া যাইবে।

অর্থাৎ অ যদি সেই সমান্তর শ্রেঢার সাধারণ অন্তর হয়, তবে

$$\frac{১}{খ}=\frac{১}{ক}+(ন+১)অ।$$

$$\therefore\quad অ=\frac{(ক-খ)}{(ন+১)খক}।$$

এবং সমান্তর শ্রেঢী এই--

$$\frac{১}{খ},\ \frac{১}{ক}+অ,\ \frac{১}{ক}+২অ,\ \text{ইত্যাদি।}$$

আর এই পদগুলির অন্যোন্যকগুলি হই লয় শ্রেঢীর পদ।

• ১৬২। যদি $গ_১, গ_২, গ_৩$ যথাক্রমে ক ও খ'র সমান্তর মধ্যম, সমগুণ মধ্যম, ও লয়মধ্যম হয়, তাহা হইলে $গ_১$ ও $গ_৩$ এর সমগুণ মধ্যম, $গ_২$ হইবে,

অর্থাৎ $গ_২ = \sqrt{গ_১ গ_৩}$,

এবং $গ_১ > গ_২ > গ_৩$।

কারণ, $$গ_১ = \frac{ক+খ}{২},$$

$$গ_২ = \sqrt{কখ},$$

$$গ_৩ = \frac{২কখ}{ক+খ}।$$

$$\therefore গ_১ গ_৩ = \frac{ক+খ}{২} \times \frac{২ক খ}{ক+খ} = ক খ$$

$$= গ_২^২।$$

আর, $$গ_১ - গ_২ = \frac{ক+খ}{২} - \sqrt{কখ}$$

$$= \frac{ক - ২\sqrt{কখ} + খ}{২}$$

$$= \frac{(\sqrt{ক} - \sqrt{খ})^২}{২},$$

এবং $(\sqrt{ক} - \sqrt{খ})^২$ একটি রাশির দ্বিতীয় শক্তি, অতএব তাহা ধনরাশি।

সুতরাং

$$গ_১ > গ_২।$$

আবার $গ_১ গ_৩ = গ_২^২$,

$$\therefore \frac{গ_১}{গ_২} = \frac{গ_২}{গ_৩}।$$

কিন্তু $$গ_১ > গ_২,$$

$$\therefore গ_২ > গ_৩।$$

১৬৩। তিনটি রাশি ক, খ, গ, সমান্তর, সমগুণ বা লয়শ্রেঢীর পর পর পদত্রয়, যদি $\frac{ক-খ}{খ-গ}=\frac{ক}{ক}$ বা $=\frac{ক}{খ}$ বা $=\frac{ক}{গ}$ ।

কারণ, যদি $\frac{ক-খ}{খ-গ}=\frac{ক}{ক}=১$,

তাহা হইলে $ক-খ=খ-গ$।

যদি $$\frac{ক-খ}{খ-গ}=\frac{ক}{খ},$$

তাহা হইলে $খ(ক-খ)=ক(খ-গ)$,

$\therefore \quad খ^২ = কগ$।

এবং যদি $$\frac{ক-খ}{খ-গ}=\frac{ক}{গ},$$

তাহা হইলে $কগ-খগ = কখ-কগ$,

$\because খগ-কগ = কগ-কখ$

$\therefore$ কখগ দিয়া ভাগ করিলে

$$\frac{১}{ক}-\frac{১}{খ}=\frac{১}{খ}-\frac{১}{গ}।$$

৯। উদাহরণমালা।

১। (১) যদি ক, খ, গ, ঘ সমান্তব শ্রেঢীব পব পব চাবিটি পদ হয়, তাহা হইলে

$$ক+ঘ = খ + গ।$$

(২) ১০, ২০, ৩০ · এই শ্রেঢীব প্রথম দশটি পদেব সমষ্টি কত?

(৩) ক+স, ক, ক−স, ক−২স এই শ্রেঢীব প্রথম আটটি পদের সমষ্টি কত?

(৪) যদি $ক^২$, $খ^২$, $গ^২$ সমান্তব শ্রেঢী হয় তবে $\frac{১}{খ+গ}$, $\frac{১}{গ+ক}$, $\frac{১}{ক+খ}$ ইহাবাও সমান্তর শ্রেঢীব পর পর পদ।

(৫) যে কোন সমান্তব শ্রেঢীব পব পব ৬টি পদেব প্রথম ও শেষ পদেব যোগফল ৩য় ও ৪র্থ পদেব যোগফলেব সমান।

২। (১) যদি ক, খ, গ, ঘ সমগুণ শ্রেঢীব পব পব পদ হয় তাহা হইলে কঘ = খগ।

(২) ১০, ২০, ৪০ এই শ্রেঢীব প্রথম দশটি পদেব সমষ্টি কত?

(৩) ১, $\frac{১}{১০}$, $\frac{১}{১০০}$, $\frac{১}{১০০০}$ এই অসীম শ্রেঢীর সমষ্টি কত?

(৪) একটি সমগুণ শ্রেঢীব তিনটি পব পব পদ আব একটি সমগুণ শ্রেঢীব পর পর পদত্রয় হইতে বিযুক্ত কবিয়া দেখা গেল বিয়োগফলত্রয়ও সমগুণ শ্রেঢীব পর পর পদ।

এই শ্রেঢীত্রয়েব সাধারণ অনুপাত যে সমান ইহা সপ্রমাণ কব।

(৫) একটি সমগুণ শ্রেঢার তিনটি পর পব পদেব সমষ্টি $২৪\frac{৪}{৫}$, ও গুণফল ৬৪। পদ তিনটি কি কি?

৩। (১) যদি ক, খ, গ লয় শ্রেঢীর পর পর পদ হয়, তাহা হইলে খগ, গক, কখ সমান্তব শ্রেঢীব পর পব পদ হইবে।

(২) একটি লয়শ্রেঢীর নতম পদ ম, মতম পদ ন। তাহার রতম পদ $\frac{মন}{র}$, ইহা সপ্রমাণ কব।

(৩) যদি ক, খ, গ সমান্তর শ্রেঢীর পর পর পদত্রয় হয়, তাহা হইলে

$$\frac{খগ}{ক(খ+গ)},\ \frac{গক}{খ(গ+ক)},\ \frac{কখ}{গ(ক+খ)}$$

লয় শ্রেঢীর পর পর পদত্রয় হইবে, ইহা সপ্রমাণ কর।

(৪) যদি ক, খ, গ, লয়শ্রেঢীর পর পর পদত্রয় হয়, তাহা হইলে

$$\frac{ক}{খ+গ},\ \frac{খ}{গ+ক},\ \frac{গ}{ক+খ},$$ ইহারাও

লয় শ্রেঢীর পর পর পদত্রয় হইবে।

(৫) একটি লয় শ্রেঢীর প্রথম পদ ক, ও নতম পদ গ। তাহার মতম পদ কি?

দশম অধ্যায়।

প্রস্তার ও সংযোগ।

১৬৪। অনেকগুলি ভিন্ন ভিন্ন বস্তু থাকিলে, তাহাদিগকে অথবা তাহাদিগের মধ্যে কোন নির্দ্দিষ্ট সংখ্যক বস্তুকে, কত প্রকারে সাজান যাইতে পারে, তাহা জানিতে সহজেই কৌতূহল জন্মে, এবং কখন কখন প্রয়োজনও হয়।

এই গণিতের গ্রন্থ তিন ভাগে বিভক্ত, পাটীগণিত, বীজগণিত, ও জ্যামিতি। কোন ছাত্রের জানিতে ইচ্ছা হইতে পারে, এই তিন খণ্ড পুস্তক কত রকমে সাজান যায়। দেখা যাইতেছে

(১)	পাটীগণিত,	বীজগণিত,	জ্যামিতি।
(২)	পাটীগণিত,	জ্যামিতি,	বীজগণিত।
(৩)	বীজগণিত,	পাটীগণিত,	জ্যামিতি।
(৪)	বীজগণিত,	জ্যামিতি,	পাটীগণিত।
(৫)	জ্যামিতি,	পাটীগণিত,	বীজগণিত।
(৬)	জ্যামিতি,	বীজগণিত,	পাটীগণিত।

এই ছয় প্রকারে তাহাদিগকে সাজান যাইতে পারে।

আবার যদি সাজানর অগ্রপশ্চাৎ ধর্ত্তব্য না হয়, এবং কেবল পুস্তকগুলির সমষ্টির প্রতি লক্ষ্য রাখি, তাহা হইলে কেবল একটি মাত্র সমষ্টি পাওয়া যাইবে, (১) হইতে (৬) যেটিই লওয়া যাউক প্রত্যেকটিতেই তিনখানি পুস্তক আছে।

এখন দেখা যাউক দুইখানি করিয়া লইলে পুস্তকগুলিকে কত রকমে সাজান যায়। দেখা যাইতেছে

(১)	পাটীগণিত,	বীজগণিত।
(২)	পাটীগণিত,	জ্যামিতি।
(৩)	বীজগণিত,	পাটীগণিত।
(৪)	বীজগণিত,	জ্যামিতি।
(৫)	জ্যামিতি,	পাটীগণিত।
(৬)	জ্যামিতি,	বীজগণিত।

এবারে এই ছয় প্রকারে সাজান যায়।

যদি সাজানব অগ্রপশ্চাৎ ধর্ত্তব্য না হয়, এবং কেবল পুস্তকেব সমষ্টির প্রতি লক্ষ্য রাখা যায়, তাহা হইলে কেবল (১), (২), ও (৬) অর্থাৎ

পাটীগণিত, বীজগণিত।
পাটীগণিত, জ্যামিতি।
বীজগণিত, জ্যামিতি।

এই তিনটি বিভিন্ন সমষ্টি পাওয়া যায়। কারণ (৩), (৪), ও (৫), সমষ্টির হিসাবে (১), (৬), ও (২), হইতে ভিন্ন নহে।

১৬৫। ভিন্ন ভিন্ন বস্তুব অগ্রপশ্চাতেব প্রতি দৃষ্টি বাখিয়া ভিন্ন ভিন্ন সাজানকে তাহাদেব **প্রস্তাব** বলে।

ভিন্ন ভিন্ন বস্তুব অগ্রপশ্চাতেব প্রতি দৃষ্টি না বাখিয়া ভিন্ন ভিন্ন সমষ্টিকে তাহাদেব **সংযোগ** বলে।

যথা ক, খ, গ, এই তিনটি অক্ষরেব অগ্রপশ্চাতের প্রতি দৃষ্টি বাখিয়া দুই দুইটি করিয়া সাজান, অর্থাৎ, কখ, কগ, খগ, খক, গক, গখ, এই ছয়টি, তাহাদেব প্রস্তাব। এবং কখ, কগ, গখ, এই তিনটি, তাহাদের সংযোগ, কাবণ,

খক, গক, খগ, সমষ্টি হিসাবে
কখ, কগ, গখ হইতে ভিন্ন নহে।

ভিন্ন ভিন্ন ন সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেক বারে ব সংখ্যক লইয়া তাহাদের প্রস্তাবের সংখ্যা $^{ন}প_{ব}$ এই চিহ্ন দ্বাবা প্রকাশ কবা যাইবে।

ভিন্ন ভিন্ন ন সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেক বাবে ব সংখ্যক লইয়া তাহাদেব সংযোগের সংখ্যা $^{ন}স_{ব}$ এই চিহ্ন দ্বারা প্রকাশ কবা যাইবে।

১৬৬। এখন দেখা যাউক ভিন্ন ভিন্ন ন সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেক বারে ব সংখ্যক লইলে, প্রস্তাবের সংখ্যা অর্থাৎ $^{ন}প_{ব}$ ইহার মূল্য কত।

এই প্রশ্ন আর এক ভাবে দেখিলে ইহাব অর্থ এই যে, ব সংখ্যক স্থান ন সংখ্যক ভিন্ন বস্তু দ্বারা কত ভিন্ন ভিন্ন প্রকারে পূর্ণ করা যায় তাহাই নির্ণয় কবিতে হইবে।

যখন ন সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু আছে, তখন প্রথম স্থানটি তাহাদের এক একটি দ্বারা ন প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

তাহার পর রহিল (ন—১) সংখ্যক বস্তু, এবং দ্বিতীয় স্থানটি তাহাদের এক একটি দ্বারা (ন—১) প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

আর, এই দ্বিতীয় (ন—১) প্রকার, প্রথম ন প্রকারের প্রত্যেকের সহিত লওয়া যায়। সুতরাং প্রথম দুইটি স্থান, ন (ন—১) প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

তাহার পর রহিল (ন—২) সংখ্যক বস্তু, এবং তৃতীয় স্থানটি তাহাদের এক একটিদ্বারা (ন—২) প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

আর এই তৃতীয় (ন—২) প্রকার প্রথম দুইটি স্থান পূরণের ন (ন—১) প্রকারের প্রত্যেকের সহিত লওয়া যায়। সুতরাং প্রথম তিনটি স্থান ন (ন—১)(ন—২) প্রকারে পূর্ণ করা যায়।

দেখা যাইতেছে, এইরূপে এক একটি স্থান বৃদ্ধির, অর্থাৎ গৃহীত বস্তুর সংখ্যা একটি একটি করিয়া বৃদ্ধির, সঙ্গে সঙ্গে প্রস্তারের সংখ্যারও এক একটি গুণক বৃদ্ধি হইতেছে, এবং স্থানের অর্থাৎ গৃহীত বস্তুর সংখ্যা র হইলে, শেষ গুণক ন—(র—১)=ন—র+১ হইবে।

অতএব ন সংখ্যক বস্তুর র সংখ্যা লইয়া প্রস্তার করিলে,

প্রস্তারের সংখ্যা ন(ন—১)(ন—২) ...... (ন—র+১) হইবে।

অর্থাৎ $^{ন}প_{র}$ = ন(ন—১)(ন—২) ...... (ন—র+১)।

যদি প্রত্যেকে বারে ন সংখ্যক বস্তু সমস্তই লওয়া যায়, তাহা হইলে প্রস্তারের সংখ্যা = ন(ন—১)(ন—২) ...... (ন—ন+১)

= ন(ন—১)(ন—২) ...... ২১।

এই শেষের লিখিত রাশি, $\underline{|ন}$ এই চিহ্নদ্বারা প্রকাশ করা যায়।

∴ $^{ন}প_{ন}$ = $\underline{|ন}$।

(১) উদাহরণ। তিনটি বস্তুর তিনটি করিয়া লইলে প্রস্তারের সংখ্যা কত?

প্রস্তারের সংখ্যা = ৩(৩—১)(৩—২) = ৬।

(২) উদাহরণ। তিনটি বস্তুর দুইটি করিয়া লইলে প্রাস্তরের সংখ্যা কত?
প্রস্তারের সংখ্যা $=৩(৩-১)=৬$।

১৬৭। একণে ন সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তুর প্রত্যেক বারে র সংখ্যক লইলে কতগুলি বিভিন্ন সংযোগ বা সমষ্টি হয়, তাহা নিরূপণ করা যাউক। এই সংযোগ সংখ্যা ${}^{ন}স_{র}$।

এই ${}^{ন}স_{র}$ সংখ্যক সমষ্টির প্রত্যেক সমষ্টিতে র সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু আছে, এবং তাহাদের প্রস্তারের সংখ্যা পূর্ব্ব ধারা অনুসারে

$$= র(র-১)(র-২) \ldots ১$$
$$= |\underline{র}\text{।}$$

অতএব ${}^{ন}স_{র}$ কে $|\underline{র}$ দিয়া গুণ করিলে, ন সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেক বারে র সংখ্যক লইলে যতগুলি প্রস্তার হয় তাহার সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

অর্থাৎ ${}^{ন}স_{র} \times |\underline{র} = {}^{ন}প_{র}$

$$= ন(ন-১)(ন-২) \ldots (ন-র+১)$$

$$\therefore \quad {}^{ন}স_{র} = \frac{ন(ন-১)(ন-২) \ldots (ন-র+১)}{|\underline{র}} \qquad (১)$$

$$= \frac{ন(ন-১)(ন-২) \ldots (ন-র+১)(ন-র)(ন-র-১) \ldots ১}{|\underline{র} \times (ন-র)(ন-র-১) \ldots ১}$$

$$= \frac{|\underline{ন}}{|\underline{র}\ |\underline{ন-র}} \qquad (২)$$

(১) উদাহরণ। তিনটি বস্তুর দুইটি করিয়া লইলে সংযোগের সংখ্যা কত?

$${}^{৩}স_{২} = \frac{৩\cdot২\cdot১}{১\cdot২} = ৩\text{।}$$

(২) উদাহরণ। তিনটি বস্তুর তিনটি করিয়া লইলে সংযোগের সংখ্যা কত?

$$^{\text{৩}}\text{স}_{\text{৩}} = \frac{\text{৩ ২ ১}}{\text{১ ২ ৩}} = \text{১}।$$

১৬৮। বিভিন্ন ন সংখ্যক বস্তুর সংযোগ সংখ্যা, প্রত্যেক বারে র সংখ্যক লইলে যাহা হয়, প্রত্যেক বারে (ন – ব) সংখ্যক লইলেও ঠিক তাহাই হয়।

কারণ, প্রত্যেক বারে ন সংখ্যক বস্তুর ব সংখ্যক লইলে সংযোগ সংখ্যা

$$= {}^{\text{ন}}\text{স}_{\text{ব}} = \frac{\lfloor\underline{\text{ন}}}{\lfloor\underline{\text{ব}}\;\lfloor\underline{\text{ন} - \text{ব}}}।$$

অতএব এই রাশিতে র স্থানে (ন – ব) লিখিলেই ন সংখ্যক বস্তুর (ন – ব) সংখ্যক লইলে যে সংযোগ সংখ্যা হয় তাহা পাওয়া যাইবে।

$$\therefore {}^{\text{ন}}\text{স}_{\text{ন} - \text{ব}} = \frac{\lfloor\underline{\text{ন}}}{\lfloor\underline{\text{ন} - \text{ব}}\;\lfloor\underline{\text{ন} - (\text{ন} - \text{ব})}}$$

$$= \frac{\lfloor\underline{\text{ন}}}{\lfloor\underline{\text{ন} - \text{ব}}\;\lfloor\underline{\text{ব}}}$$

$$= {}^{\text{ন}}\text{স}_{\text{র}}।$$

এই কথাটি অঙ্ক বা অক্ষরপ্রয়োগপ্রক্রিয়াব কোন সাহায্য না লইয়াও আব একপ্রকারে অতি সহজে সপ্রমাণ কবা যায়।

যথা—

বিভিন্ন ন সংখ্যক বস্তু হইতে **যতবার** ভিন্ন ভিন্ন ব সংখ্যক বস্তু **লইবে** তাহাব **প্রত্যেক বারেই** (ন – ব) সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু **পড়িয়া থাকিবে**। সুতবাং ব সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর সংযোগ বা সমষ্টি যতগুলি, (ন – র) সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুব সংযোগ বা সমষ্টি ঠিক ততগুলি অবশ্যই হইবে।

১৬৯। উপবে ১৬৬ ধারায় দেখা গিয়াছে, ন সংখ্যক বস্তুর র সংখ্যক লইয়া যে প্রস্তার হয় তাহাব সংখ্যা, র যত বৃদ্ধি পায ততই বৃদ্ধি পাইতে

থাকে, কারণ রএর পরিমাণ এক এক করিয়া যেমন বৃদ্ধি পায়, প্রস্তারের সংখ্যা একের অন্যূন একটি একটি গুণকের দ্বারা গুণিত হইতে থাকে।

সুতরাং যখন র = ন, তখনই

${}^{ন}প_{র}$ এর মূল্য গরিষ্ঠ।

কিন্তু ১৬৮ ধারায় দেখা গিয়াছে ন সংখ্যক বস্তুর র সংখ্যক লইয়া যে সংযোগ সংখ্যা হয়, (ন − র) সংখ্যক লইয়াও সংযোগ সংখ্যা ঠিক তাহাই হয়। সুতরাং রএর বৃদ্ধির সঙ্গে সংযোগ সংখ্যা কিয়দ্দূর বৃদ্ধি পাইতে পারে কিন্তু শেষ পর্য্যন্ত নহে।

অতএব রএর সংখ্যা কত হইলে সংযোগ সংখ্যা গরিষ্ঠ হইবে তাহা নির্ণয় করা আবশ্যক।

দেখা যাইতেছে

$${}^{ন}স_{র-১} = \frac{ন(ন-১)(ন-২) \quad (ন-র+২)}{(র-১)(র-২) \quad ১},$$

$${}^{ন}স_{র} = \frac{ন(ন-১)(ন-২) \quad (ন-র+১)}{র(র-১)(র-২) \quad ১},$$

$$\therefore \quad {}^{ন}স_{র} = \frac{ন-র+১}{র} \times {}^{ন}স_{র-১}$$

$$= \left(\frac{ন+১}{র} - ১\right) \times {}^{ন}স_{র-১}।$$

অতএব যতক্ষণ $\left(\frac{ন+১}{র} - ১\right)$ একের অধিক থাকিবে ততক্ষণ র এর সঙ্গে সঙ্গে সংযোগ সংখ্যা বৃদ্ধি পাইবে।

প্রথমতঃ মনে কর ন যুগ্ম এবং = ২ম।

তাহা হইলে $\quad \frac{ন+১}{র} - ১ = \frac{২ম+১}{র} - ১,$

এবং র যতক্ষণ ম'র অনধিক,

ততক্ষণ $\quad \frac{ন+১}{র} - ১ > ১।$

অতএব যখন $ব = ম = \frac{ন}{২}$,

তখন $^{ন}স_{র}$ গরিষ্ঠ।

দ্বিতীয়তঃ মনে কর ন অযুগ্ম এবং = ২ম + ১।

$$\text{তাহা হইলে}\quad \frac{ন+১}{ব} - ১ = \frac{২ম+১+১}{ব} - ১$$

$$= \frac{২ম+২}{র} - ১$$

$$= ১,$$

$$\text{যখন}\quad ব = ম+১$$

$$= \frac{ন+১}{২}$$

এবং তখন $^{ন}স_{ব}$ গরিষ্ঠ।

আবার যখন $র = \frac{ন-১}{২}$,

তখনও $^{ন}স_{র}$ গরিষ্ঠ,

$$\text{কারণ}\quad {}^{ন}স_{\frac{ন+১}{২}} = {}^{ন}স_{ন-\frac{ন+১}{২}}$$

$$= {}^{ন}স_{\frac{ন-১}{২}}\text{।}$$

১৭০। বিভিন্ন ন সংখ্যক বস্তুর ব সংখ্যক লইলে প্রস্তাবের ও সংযোগেব সংখ্যা কত কত হয় তাহা উপরে নির্ণীত হইয়াছে। ন সংখ্যক বস্তু সমস্ত বিভিন্ন না হইলে তাহার ব সংখ্যক লইয়া প্রস্তাবেব ও সংযোগের সংখ্যা কত কত হয়, তাহা নির্ণয় কবা কিছু জটিল। তবে তাহাদের সমস্ত লইয়া প্রস্তাবের সংখ্যা নির্ণয় করা সহজ, ও তাহাব প্রণালী নিম্নে দর্শিত হইতেছে।

মনে কর ন সংখ্যক বস্তুর মধ্যে ফ সংখ্যক বস্তু এক রকমের, ব সংখ্যক আর এক রকমের, ও ভ সংখ্যক আর এক রকমের, এবং বাকি বস্তুগুলি সমস্ত বিভিন্ন রকমের। এবং মনে কর প্রস্তাবের সংখ্যা শ।

তাহা হইলে দেখা যাইতেছে, যদি এই ফ সংখ্যক বস্তুগুলি বিভিন্ন প্রকারের হইত, তবে কেবল তাহাদের লইয়াই, এবং অপর বস্তুর স্থান পরিবর্ত্তন না করিয়া, প্রত্যেক প্রস্তাবের স্থলে $\underline{|\text{ফ}}$ সংখ্যক প্রস্তাব হইত, এবং সমস্ত প্রস্তারের সংখ্যা

$$\text{শ} \times \underline{|\text{ফ}} \text{ হইত।}$$

সেই কারণেই, যদি ঐ ব সংখ্যক বস্তু আবার ভিন্ন ভিন্ন প্রকারের হইত, তাহা হইলে সমস্ত প্রস্তাবের সংখ্যা পূর্ব্ব সংখ্যার $\underline{|\text{ব}}$ গুণ হইত, অর্থাৎ সমস্ত সংখ্যা

$$\text{শ} \times \underline{|\text{ফ}} \times \underline{|\text{ব}} \text{ হইত;}$$

এবং ঐ ভ সংখ্যক বস্তু আবার ভিন্ন ভিন্ন প্রকারের হইলে, সমস্ত প্রস্তাবের সংখ্যা

$$\text{শ} \times \underline{|\text{ফ}} \times \underline{|\text{ব}} \times \underline{|\text{ভ}} \text{ হইত।}$$

কিন্তু এই শেষের লিখিত সংখ্যা, ন সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তুর সমস্ত লইয়া প্রস্তাবের সংখ্যা।

অতএব $\text{শ} \times \underline{|\text{ফ}} \times \underline{|\text{ব}} \times \underline{|\text{ভ}} = \underline{|\text{ন}}$।

$$\therefore \quad \text{শ} = \frac{\underline{|\text{ন}}}{\underline{|\text{ফ}}\,\underline{|\text{ব}}\,\underline{|\text{ভ}}}\text{।}$$

(১) উদাহরণ। নব বসন এই শব্দের অক্ষর গুলির কত প্রকার প্রস্তাব হইতে পারে?

$$\text{প্রস্তার সংখ্যা} = \frac{\underline{|৫}}{\underline{|২}\,\underline{|২}} = ৩০\text{।}$$

(২) উদাহরণ। কতগুলি তিন অঙ্কের ভিন্ন ভিন্ন সংখ্যা ২২৫ এই রাশির অঙ্কগুলি লইয়া হইতে পারে?

$$\text{উত্তর} = \frac{\underline{|৩}}{\underline{|২}} = ৩\text{।}$$

১৭১। ন সংখ্যক বস্তুর র সংখ্যক লইয়া প্রস্তারের সংখ্যা কত হইবে, যদি প্রত্যেক বস্তু একবার হইতে র বার পর্য্যন্ত এক প্রস্তারে লওয়া যাইতে পারে?

এই প্রশ্ন আর এক ভাবে দেখিলে ইহার অর্থ এই যে, র সংখ্যক স্থান ন সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন বস্তু দ্বারা পূর্ণ করিতে গেলে এবং প্রত্যেক প্রস্তারে কোন একটি বস্তু এক হইতে র বার পর্য্যন্ত রাখা গ্রাহ্য হইলে, কত বিভিন্ন প্রকারে সেই স্থানগুলি পূর্ণ করা যায় তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

প্রথম স্থানটিতে ন সংখ্যক বস্তুর যে কোনটি রাখা যায়, অতএব প্রথম স্থান ন সংখ্যক প্রকারে পূর্ণ করা যায়। তাহার পর দ্বিতীয় স্থানটি পূরণের নিমিত্ত (ন—১) সংখ্যক বস্তু আছে, এবং যখন প্রথম স্থানে স্থাপিত বস্তুটি যে কোন প্রস্তারে একের অধিকবার থাকিতে পারে, তখন সে বস্তুটিও দ্বিতীয় স্থানে থাকিতে পারে। অতএব দ্বিতীয় স্থান পূরণার্থেও ন সংখ্যক বস্তু আছে, আর দ্বিতীয় স্থানও ন সংখ্যক প্রকারে পূর্ণ হইতে পারে। এবং তাহার প্রত্যেক প্রকার পূর্ব্বোক্ত প্রকারের সহিত লওয়া যাইতে পারে।

সুতরাং দুটি স্থান পূরণের প্রকারের সংখ্যা

$=ন \times ন = ন^{২}$।

এইরূপে দেখা যায় তিনটি স্থান পূরণের প্রকারের সংখ্যা

$= ন^{২} \times ন = ন^{৩}$। ইত্যাদি।

অতএব র স্থান পূরণের প্রকারের সংখ্যা

$= ন^{র}$।

(১) উদাহরণ। চারিটি ছাত্রকে তিনখানি পারিতোষিক পুস্তক দেওয়া যাইবে, এবং প্রত্যেক ছাত্রই এক খানি হইতে সমস্ত তিন খানিই পাইতে পারে। পারিতোষিকগুলি কত রকমে দেওয়া যায়?

রকমের সংখ্যা $=৪^{৩}=৬৪$।

(২) উদাহরণ। দুটি পদের নিমিত্ত পাঁচ জন প্রার্থী। প্রত্যেকেই একটি পদ বা দুইটিই পাইতে পারেন। নির্ব্বাচন কত প্রকারে হইতে পারে?

নির্ব্বাচনের প্রকারের সংখ্যা $=৫^{২}=২৫$।

১৭২। যদি ন সংখ্যক বস্তু থাকে, তাহা হইলে তাহাদের কতিপয় বা সমস্ত কত প্রকারে লওয়া যাইতে পারে?

প্রত্যেক বস্তু সম্বন্ধেই দ্বিবিধ প্রক্রিয়ার প্রয়োগ হইতে পারে, অর্থাৎ, তাহা লওয়া অথবা না লওয়া যাইতে পারে।

দুটি বস্তু থাকিলে, প্রথমটিকে লওয়া না লওয়া এই দুই প্রক্রিয়ার প্রত্যেকের সহিত, দ্বিতীয়টিকে লওয়া না লওয়া এই দুই প্রক্রিয়ার সংযোগ হইতে পারে। সুতবাং দুটি বস্তু থাকিলে তাহাব কোন একটিকে বা উভয়কে লওয়া না লওয়া প্রক্রিয়ার প্রকাবেব সংখ্যা = ২ × ২ = ২²।

তাহার পর তৃতীয় বস্তু একটি থাকিলে, তাহাকে লওয়া না লওয়া এই দ্বিবিধ প্রক্রিয়া, উক্ত ২² সংখ্যক প্রক্রিয়াব প্রত্যেকেব সহিত সংযুক্ত হইতে পারে। সুতবাং তিনটি বস্তু থাকিলে তাহাদের কোন একটি কোন দুইটি বা সমস্ত তিনটি লওয়া না লওয়াব প্রক্রিয়াব প্রকাবেব সংখ্যা

= ২² × ২ = ২³।

এইরূপে দেখা যাইতেছে ন সংখ্যক বস্তু থাকিলে তাহাদেব কতিপয় বা সমস্ত লওয়া না লওয়াব প্রক্রিয়াব প্রকারেব সংখ্যা

= ২ⁿ।

কিন্তু এই ২ⁿ সংখ্যক প্রক্রিয়াব মধ্যে কোন একটি বস্তুকেও না লওয়া এই প্রক্রিয়াটি বহিয়াছে, এবং সেটি প্রশ্নের উত্তবে গণনীয় নহে। সুতবাং প্রশ্নের উত্তর, অর্থাৎ ইষ্ট সংখ্যা = ২ⁿ – ১।

এই সংখ্যাকে ন সংখ্যক বস্তুব **সাকল্য সংযোগ সংখ্যা** বলে।

১৭৩। ভাস্করাচার্য্যের লীলাবতী গ্রন্থেব ৪র্থ অধ্যায়ের ৬ষ্ঠ পরিচ্ছেদে এবং ১৩শ অধ্যায়ে প্রস্তার ও সংযোগ সম্বন্ধীয় অনেকগুলি বিচিত্র প্রশ্ন আছে। শিক্ষার্থী ঐ গ্রন্থেব সেই সেই ভাগ পাঠ কবিলে ভাল হয়।

১৭৪। দেখা গিয়াছে ন সংখ্যক বস্তু **সারি দিয়া** সাজাইলে প্রস্তারেব সংখ্যা |ন হইবে। যদি **চক্রাকারে** সাজান যায় তাহা হইলে সেই সংখ্যার কোন পরিবর্তন হইবে কি না দেখা আবশ্যক।

যদি বস্তুগুলির প্রত্যেক প্রস্তারে তাহাদের নির্দ্দিষ্ট স্থানেব প্রতি লক্ষ্য রাখা যায়, অথবা চক্রের ন সংখ্যক স্থানে যদি ন সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন প্রকারেব

*পৃথক্ আসন বস্তুগুলি বসাইবার নিমিত্ত থাকে, তাহা হইলে সহজেই বুঝা যায় যে প্রস্তারের সংখ্যা, সারি দিয়া সাজাইলে যাহা হয়, চক্রাকারে সাজাইলে ঠিক তাহাই হইবে।

কিন্তু যদি বস্তুগুলিব নির্দিষ্ট স্থানের প্রতি দৃষ্টি না রাখিয়া কেবল তাহাদের অগ্র পশ্চাতের প্রতি দৃষ্টি রাখা যায়, তাহা হইলে সারি দিয়া সাজানতে যতগুলি ভিন্ন প্রস্তাব হয়, চক্রাকারে সাজাইলে তাহাব অনেকগুলি অভিন্ন বলিয়া মনে হইবে।

যথা, যদি ক খ গ ঘ এই চারিটি বস্তু থাকে, তাহা হইলে সাবি দিয়া সাজানতে

ক খ গ ঘ, এবং খ গ ঘ ক এই দুইটি ভিন্ন ভিন্ন।

কিন্তু চক্রাকারে সাজাইলে ও নির্দ্দিষ্ট স্থানের প্রতি দৃষ্টি না বাখিয়া কেবল অগ্রপশ্চাতেব প্রতি দৃষ্টি বাখিলে

    ক   খ
ঘ   খ এবং ক   গ
    গ   ঘ

এই দুইটি অভিন্ন প্রস্তার বলিয়া বোধ হইবে।

এ ভাবে দেখিলে ন সংখ্যক বস্তুব যে কোন একটিকে এক স্থানে স্থায়ী বাখিয়া অপব (ন—১) সংখ্যক বস্তুর স্থান পবিবর্ত্তন দ্বাবা প্রস্তার সংখ্যা যাহা হয় তাহা, অর্থাৎ |ন—১ প্রকৃত প্রস্তার সংখ্যা হইবে।

যদি ন সংখ্যক ভিন্ন ভিন্ন প্রকারের মণি এক সূত্রে গাঁথিয়া মণিহার প্রস্তুত কবা যায়, এবং সেই নানাবিধ মণির কোনটিরই সোজা উল্‌টা না থাকে ও প্রত্যেকের সকল দিকই সমান হয়, তাহাদিগকে গাঁথিবাব ভিন্ন ভিন্ন প্রকাবের সংখ্যা, অর্থাৎ প্রস্তাব-সংখ্যা, ½ |ন—১ হইবে, কাবণ দুইটি বিপরীত প্রস্তাব, মণিহার উল্‌টাইয়া লইলে একই হইবে।

যথা, যদি ক খ গ ঘ চারিটি মণি থাকে,

     ক   ক
খ   ঘ এবং ঘ   খ
     গ   গ

এই দুইটি প্রস্তারের প্রথমটি, হাব উল্‌টাইয়া লইলেই, দ্বিতীয়টির আকাব ধারণ করিবে।

১০। উদাহরণ মালা।

১। (১) সাতটি বস্তুর চারিটি করিয়া লইলে কতকগুলি প্রস্তার হয়?

(২) পাঁচখানি আসনে পাঁচজন লোক বসিবেন। তাঁহারা কতগুলি ভিন্ন ভিন্ন প্রকারে বসিতে পারেন?

(৩) যদি লঘু ও গুরু এই দুটি মাত্রার প্রত্যেকটি এক প্রস্তারে এক হইতে তিনবার পর্য্যন্ত থাকিতে পারে, তাহা হইলে লঘু গুরু লইয়া ত্রিমাত্রার প্রস্তার কতগুলি হইতে পারে?

(৪) কোন একটি পদের প্রার্থী ৩ জন ও নির্ব্বাচক ৫ জন। নির্ব্বাচকেরা কতপ্রকারে তাঁহাদের অভিমত দিতে পারেন?

(৫) ২ ৬ ১০ ১৪ ন সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত

$=(ন+১)(ন+২)(ন+৩)$ ন সংখ্যক উৎপাদক পর্য্যন্ত,

ইহা সপ্রমাণ কর।

২। (১) যদি $^{ন}প_{র}=২৭২,\ ^{ন}স_{র}=১৩৬,$

তাহা হইলে ন ও র কত কত?

(২) দশজন ছাত্র একটি পরীক্ষায় প্রথম বিভাগে উত্তীর্ণ হইয়াছে। তিনটি তুল্য ছাত্রবৃত্তি তাহাদিগকে দেওয়া যাইবে, এবং প্রত্যেকেই তাহার একটি পাইতে পারে। ঐ ছাত্রবৃত্তি বিতরণের কার্য্য কত বিভিন্ন প্রকারের হইতে পারে?

(৩) পঞ্চদশভুজ সমতল ক্ষেত্রের কতগুলি কর্ণ (কোণাকোণী রেখা) টানিতে পারে?

(৪) যদি $^{ন}স_{র}={}^{ন}স_{র'}$,

তাহা হইলে $র=র'$, অথবা $র+র'=ন$।

(৫) এক জন বিক্রেতার নিকট ২০টি পেয়ারা আছে তাহার দর ১ আনায় ৩টি। ছয় আনার পেয়ারা কিনিতে গেলে কত রকমে পেয়ারা বাছিয়া লওয়া যায়, এবং তাহার মধ্যে কত রকমে সর্ব্বাপেক্ষা বড় পেয়ারাটি থাকিবে।

একাদশ অধ্যায়।

দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণ।

১৭৫। গুণনদ্বারা জানা যায়,

$(স+অ)^২ = স^২+২অস \ +অ^২$,

$(স+অ)^৩ = স^৩+৩অস^২+৩অ^২স \ +অ^৩$,

$(স+অ)^৪ = স^৪+৪অস^৩+৬অ^২স^২+৪অ^৩স+অ^৪$।

তাহাতে দেখা যাইতেছে, দ্বিপদেব শক্তিপ্রসাবণে যে বাশিমালা পাওয়া যায় তাহা নিয়মবদ্ধ, যথা,

(১) প্রসারিত বাশিমালাব পদ সংখ্যা শক্তিচিহ্ন অপেক্ষা এক অধিক।

(২) প্রথম ও শেষ পদেব শক্তিচিহ্ন দ্বিপদেব শক্তিচিহ্নেব সমান, এবং অপব প্রত্যেক পদেবই অক্ষবদ্বয়েব শক্তিচিহ্নেব যোগফল দ্বিপদের শক্তিচিহ্নেব সমান, আর স'ব শক্তিচিহ্ন ক্রমশঃ এক এক কবিয়া হ্রাস ও অ'ব শক্তিচিহ্ন এক এক কবিয়া বৃদ্ধি পাইতেছে।

(৩) প্রথম ও শেষ পদেব প্রকৃতি এক, অন্যান্য পদেব প্রকৃতি কিরূপে গঠিত হইল তাহা তত স্পষ্ট বুঝা যায় না।

এখন দেখা আবশ্যক,

$(স+অ)^ন$

এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসাবণে যে বাশিমালা পাওয়া যাইবে তাহা কি কি নিয়মের অধীন।

১৭৬। সেই নিয়মগুলি নিরূপণ করণার্থে অগ্রে একটি প্রাসঙ্গিক কথার কিঞ্চিৎ আলোচনা আবশ্যক।

সে কথাটি সঙ্ক্ষেপে এই।—

যদি দেখা যায় যে, কোন নিয়ম প্রথম স্থল হইতে দুই একটি বিশেষ স্থলে খাটে, এবং যদি আবও দেখা যায় যে, সেই নিয়ম যে কোন এক স্থলে খাটে

বলিয়া মানিয়া লইলে তাহার ঠিক পরবর্ত্তী স্থলেও তাহা অবশ্যই খাটিবে, তাহা হইলে নিশ্চিত বলা যায় যে, সে নিয়মটি সামান্যতঃ খাটে।

কারণ, যখন দেখা যাইতেছে, নিয়মটি যে কোন এক স্থলে খাটিলে তাহার পরবর্ত্তী স্থলে অবশ্যই খাটিবে, এবং যখন দেখা যাইতেছে তাহা প্রথম স্থল হইতে একটি বিশেষ স্থলে খাটে, তখন তাহা অবশ্যই তৎপরবর্ত্তী স্থলে খাটিবে, এবং তাহা হইলেই আবার তৎপরবর্ত্তী স্থলে খাটিবে। এইরূপে এক স্থলের পর তৎপরবর্ত্তী স্থলে খাটিতে থাকিবে। সুতরাং তাহা সাধারণতঃ সর্ব্বত্র খাটিবে।

এই প্রমাণপ্রণালীকে **গণিতের সামান্যানুমান** বলে, অর্থাৎ, এতদ্দ্বারা বিশেষ তত্ত্ব হইতে সামান্য তত্ত্ব নিশ্চিত অনুমিত হয়।

স্মরণ রাখা আবশ্যক যে, দুই চারিটি বিশেষ দৃষ্টান্ত দেখিয়া কোন সামান্য তত্ত্ব অনুমিত হইতে পারে না, যতক্ষণ না আরও দেখা যায় যে, সেই তত্ত্বটির সত্যতা যে কোন বিশেষ স্থলে মানিয়া লইলে তাহা অবশ্যই তৎপরবর্ত্তী স্থলেও সত্য হইবে। ২টি উদাহরণ দৃষ্টে এই কথাগুলি আরও স্পষ্টরূপে বুঝা যাইবে।

(১) উদাহরণ। দেখা যাইতেছে,

$১+২=৩$, এবং ৩ একটি মৌলিক সংখ্যা।

$২+৩=৫$, ৫

$৩+৪=৭$, ৭

কিন্তু এই তিনটি বিশেষ দৃষ্টান্ত হইতে যদি অনুমান করা যায় যে, সংখ্যা-শ্রেণির যে কোন দুটি পরপর সংখ্যার যোগফল মৌলিক সংখ্যা, সে অনুমান ভ্রান্ত, এবং সে ভ্রম উপরের তিনটির পর চতুর্থ দৃষ্টান্তেই প্রকাশ পাইবে—

কারণ $৪+৫=৯$, এবং ৯ মৌলিক সংখ্যা নহে,

$৯=৩\times৩$।

(২) উদাহরণ। ভাগ ক্রিয়াদ্বারা দেখা যাইতেছে

$$\frac{অ^{ন}-স^{ন}}{অ-স}=অ^{ন-১}+স\times\frac{অ^{ন-১}-স^{ন-১}}{অ-স}।$$

অতএব যদি $\left(অ^{ন-১} - স^{ন-১}\right)$ রাশি (অ−স) দ্বারা বিভাজ্য হয় তাহা হইলে $\left(অ^{ন} - স^{ন}\right)$ অবশ্যই (অ−স) দ্বারা বিভাজ্য হইবে।

কিন্তু (অ−স) এই রাশি (অ−স) দ্বারা বিভাজ্য।
এবং ভাগক্রিয়াদ্বারা দেখা যায়,

$(অ^২ - স^২)$ এই রাশি (অ−স) দ্বারা বিভাজ্য।

অতএব $(অ^৩ - স^৩)$ এই
$(অ^৪ - স^৪)$
ইত্যাদি ইত্যাদি।

সুতরাং সাধারণতঃ

$অ^{ন} - স^{ন}$ (অ−স) দ্বারা বিভাজ্য।

১৭৭। এক্ষণে $(স+অ)^{ন}$ এই **দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণের নিয়ম** নিরূপণ করা যাউক।

গুণনদ্বারা দেখা যায়—

$$(স+অ_১)(স+অ_২) = স^২ + (অ_১ + অ_১)স + অ_১অ_১,$$

$$(স+অ_১)(স+অ_২)(স+অ_৩) = স^৩ + (অ_১ + অ_২ + অ_৩)স^২ + (অ_১অ_২ + অ_১অ_৩ + অ_২অ_৩)স + অ_১অ_২অ_৩,$$

$$(স+অ_১)(স+অ_২)(স+অ_৩)(স+অ_৪) = স^৪ + (অ_১ + অ_২ + অ_৩ + অ_৪)স^৩ + (অ_১অ_২ + অ_১অ_৩ + অ_১অ_৪ + অ_২অ_৩ + অ_২অ_৪ + অ_৩অ_৪)স^২ + (অ_১অ_২অ_৩ + অ_১অ_২অ_৪ + অ_১অ_৩অ_৪ + অ_২অ_৩অ_৪)স + অ_১অ_২অ_৩অ_৪।$$

এই কয়েকটি দৃষ্টান্তে দেখা যাইতেছে, নিম্নলিখিত নিয়মত্রয় খাটে—

(১) দক্ষিণের রাশিমালার পদসংখ্যা বামের উৎপাদক সংখ্যা অপেক্ষা এক অধিক।

(২) স'র শক্তিচিহ্ন প্রথম পদে উৎপাদক সংখ্যার সমান, এবং তাহার পর প্রত্যেক পদে এক এক কম।

(৩) প্রথম পদের প্রকৃতি এক, দ্বিতীয় পদের প্রকৃতি উৎপাদকসমূহের দ্বিতীয় পদের যোগফল, তৃতীয় পদের প্রকৃতি উৎপাদকসমূহের দ্বিতীয় পদের দুই দুইটির গুণফলের সমষ্টি, চতুর্থ পদের প্রকৃতি উৎপাদকসমূহের দ্বিতীয় পদের তিন তিনটির গুণফলের সমষ্টি। এবং শেষ পদটি উৎপাদকসমূহের সমস্ত দ্বিতীয় পদের গুণফল।

এখন এই নিয়মগুলি যে সামান্যতঃ খাটে তাহা প্রতিপন্ন করিতে হইবে।

মনে কর এই নিয়মগুলি (ন—১) সংখ্যক দ্বিপদ উৎপাদকের গুণফলে খাটে, অর্থাৎ মনে কর

$$(স+অ_১)(স+অ_২)(স+অ_৩) \ldots (স+অ_{ন-১})$$
$$= স^{ন-১}+প_১স^{ন-২}+প_২স^{ন-৩}+প_৩স^{ন-৪}+ \ldots +প_{ন-১} \qquad (১)$$

যথায়

$প_১ = অ_১, অ_২, অ_৩ \ldots, অ_{ন-১}$এর সমষ্টি,

$প_২ = অ_১, অ_২, অ_৩$ প্রভৃতির দুই দুইটির গুণফলের সমষ্টি,

$প_৩ =$ ... তিন তিনটির ... ,

.

$প_{ন-১} =$ ... সমস্তের ... গুণফল।

উপরের (১) এর উভয় পক্ষকে আর একটি দ্বিপদ উৎপাদক $(স+অ_ন)$ দ্বারা পূর্ণ কর।

তাহা হইলে

$$(স+অ_১)(স+অ_২) \ldots (স+অ_{ন-১})(স+অ_ন)$$
$$= স^ন+(প_১+অ_ন)স^{ন-১}+(প_২+প_১অ_ন)স^{ন-২}$$
$$+(প_৩+প_২অ_ন)স^{ন-৩}+ \ldots +প_{ন-১}অ_ন।$$

এবং $(প_১ + অ_ন) =$ অ$_১$, অ$_২$, অ$_৩$, অ$_ন$ ইহাদের সমষ্টি,

$(প_২ + প_১ অ_ন) =$ দুই দুইটির গুণফলের সমষ্টি,

$(প_৩ + প_২ অ_ন) =$ তিন তিনটির ,

$প_{ন-১} অ_ন =$ সমস্তের গুণফল।

অতএব যদি উক্ত নিয়মগুলি (ন−১) সংখ্যক উৎপাদক স্থলে খাটে, তাহা হইলে তাহারা ন সংখ্যক উৎপাদক স্থলেও খাটিবে।

কিন্তু ঐ নিয়মগুলি দুটি, তিনটি, ও চারিটি উৎপাদক স্থলে খাটে তাহা পূর্ব্বে দেখা গিয়াছে।

সুতরাং সেই নিয়মগুলি পাঁচটি উৎপাদক স্থলেও খাটিবে, এবং তাহা হইলেই ছয়টি উৎপাদকস্থলে খাটিবে। ইত্যাদি।

অতএব সেই নিয়মগুলি সাধারণতঃ সর্ব্বত্র খাটে।

এখন মনে কর

$$(স+অ_১)(স+অ_২) \quad (স+অ_ন)$$

$$= স^ন + ক_১ স^{ন-১} + ক_২ স^{ন-২} + \quad + ক_র স^{ন-র} + \quad + ক_ন \quad (১)$$

তাহা হইলে

$ক_১$এর পদসংখ্যা$=$অ$_১$, অ$_২$, প্রভৃতির সংখ্যা$=$ন,

$ক_২ =$ অ$_১$, অ$_২$ প্রভৃতির দুই দুই লইয়া সংযোগ সংখ্যা $= \frac{ন(ন-১)}{১ \cdot ২}$,

$ক_৩ =$ তিন তিন $= \frac{ন(ন-১)(ন-২)}{১ \cdot ২ \cdot ৩}$,

ইত্যাদি ইত্যাদি ইত্যাদি।

আর যদি $অ_১ = অ_২ = অ_৩ = \quad = অ_ন = অ$ হয়,

তাহা হইলে
$$ক_১ = নঅ,$$
$$ক_২ = \frac{ন(ন-১)}{১.২} অ^২,$$
$$ক_৩ = \frac{ন(ন-১)(ন-২)}{১ ২ ৩} অ^৩,$$
$$ক_ন \qquad = অ^ন,$$

এবং (২) এর বাম পক্ষ $= (স + অ)^ন$।

অতএব (২) এই আকার ধারণ করিবে—

$$(স+অ)^ন = স^ন + নঅস^{ন-১}$$
$$+ \frac{ন(ন-১)}{১ ২} অ^২স^{ন-২} +$$
$$+ \frac{ন(ন-১)}{১ ২ ৩} \frac{(ন-ব+১)}{ব} অ^বস^{ন-ব} +$$
$$+ \frac{ন(ন-১)}{১ ২} অ^{ন-২}স^২ + নঅ^{ন-১}স + অ^ন। \quad (৩)$$

এই (৩) সাম্যকে নিম্নের আকারেও প্রকাশ করা যায়

$$(স+অ)^ন = স^ন + {}^নস_১ অস^{ন-১} + {}^নস_২ অ^২স^{ন-২} +$$
$$+ {}^নস_ব অ^বস^{ন-ব} + \quad + {}^নস_{ন-১} অ^{ন-১}স + অ^ন। (৪)$$

এস্থলে মনে রাখা আবশ্যক স ও স সম্পূর্ণ বিভিন্ন বস্তু। স একটি রাশি, এবং স একটি সাঙ্কেতিক চিহ্ন। স'র কোন মূল্য নাই, $^নস_১$, $^নস_২$ ইত্যাদি ন সংখ্যক বস্তুর একটি দুটি ইত্যাদি লইয়া যত যতগুলি সংযোগ হয় তাহারই সংখ্যাবাচক চিহ্ন।

উপরের (৩) ও (৪) সাম্যে সকল পদই সমশক্তি, অর্থাৎ স'র ও অ'র শক্তিচিহ্নের যোগফল সকল পদেই সমান এবং = ন।

১৭৮। উপরের $(স+অ)^ন$ দ্বিপদের শক্তি প্রসারণে (র+১)তম পদ

$$=\frac{ন(ন-১)(ন-২)\ (ন-র+১)}{১\ ২\ ৩\ \ র} অ^র স^{ন-র}$$

$$=\frac{\lfloor ন}{\lfloor র \lfloor ন-র} অ^র স^{ন-র}।$$

১৭৯। উপরের ১৭৭ ধারার (৩) সাম্যে স'র স্থানে ১ ও অ'র পরিবর্ত্তে স লিখিলে ঐ সাম্য এই আকার ধারণ করিবে—

$$(১+স)^ন = ১+নস+\frac{ন(ন-১)}{১-২}স^২+\frac{ন(ন-১)(ন-২)}{১-২-৩}স^৩+\quad +স^ন \cdot (৫)$$

$$=১+{}^ন স_১ স+{}^ন স_২ স^২+{}^ন স_৩ স^৩+\quad +স^ন \qquad (৬)$$

আবার (৬) সাম্যে স'র স্থানে −স লিখিলে

$$(১-স)^ন = ১-{}^ন স_১ স+{}^ন স_২ স^২-{}^ন স_৩ স^৩+\quad \pm স^ন \qquad (৭)$$

উপরের (৭) সাম্যে ন যুগ্ম রাশি হইলে $স^ন$ ধনরাশি

ও ন অযুগ্ম $স^ন$ ঋণরাশি হইবে।

১৮০। উপরের ১৭৯ ধারার (৬) সাম্যে স = ১ লিখিলে

$$২^ন = ১+{}^ন স_১+{}^ন স_২+{}^ন স_৩+\quad +{}^ন স_ন,$$

$$২^ন-১ = {}^ন স_১+{}^ন স_২+{}^ন স_৩+\quad +{}^ন স_ন।$$

(১৭২ ধারাতেও এই সাম্য পাওয়া গিয়াছে)।

১৮১। উপরের ১৭৯ ধারার (৭) সাম্যে স = ১ লিখিলে,

$$০ = ১-{}^ন স_১+{}^ন স_২-{}^ন স_৩+$$

∴ ১ = অযুগ্ম পদের প্রকৃতি সমষ্টি—যুগ্ম পদের প্রকৃত সমষ্টি।

এই সাম্য হইতে দেখা যাইতেছে ন সংখ্যক বস্তুর মধ্য হইতে অযুগ্ম সংখ্যক বস্তু লইয়া যতগুলি সংযোগ হয় তাহার সংখ্যা, যুগ্ম-সংখ্যক বস্তু লইয়া যতগুলি সংযোগ হয় তাহার সংখ্যা অপেক্ষা এক অধিক।

১৮২। যে কোন দ্বিপদ $(অ+স)^{ন}$ এর শক্তিপ্রসাবণ, $(১+স)^{ন}$ এর শক্তিপ্রসারণের আকার জানা থাকিলেই, অনায়াসে জানা যায়।

কারণ, $(অ+স)^{ন}=অ^{ন}\left(১+\frac{স}{অ}\right)^{ন}$।

১৮৩। এতক্ষণ $(১+স)^{ন}$ এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসাবণ এই অনুমানে নিরূপণ করা যাইতেছিল যে, শক্তিসূচক সংখ্যা ন একটি অখণ্ড ধনবাশি। কিন্তু শক্তিসূচক খণ্ডরাশি এবং ঋণরাশিও হইতে পারে (৭৮—৮০ ধারা দ্রষ্টব্য), এবং তাহা হইলে $(১+স)^{ন}$ এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণ কিরূপ হইবে তাহা এক্ষণে আলোচ্য।

১৮৪। প্রথমতঃ শক্তিচিহ্ন ন **খণ্ড ধনরাশি** হইলে $(১+স)^{ন}$ এর শক্তিপ্রসারণ নিরূপণ করা যাউক।

যদি ন ও ম অখণ্ড ধনরাশি হয়, তাহা হইলে

$$(১+স)^{ন}=১+নস+\frac{ন\,ন-১}{১\,২}স^{২}+\frac{ন(ন-১)\,ন-২}{১\,২\,৩}স^{৩}+\quad(১)$$

$$(১+স)^{ম}=১+মস+\frac{ম(ম-১)}{১\,২}স^{২}+\frac{ম(ম-১)(ম-২)}{১\,২\,৩}স^{৩}+\quad(২)$$

কিন্তু $(১+স)^{ন}\times(১+স)^{ম}=(১+স)^{ন+ম}$।

অতএব (১) ও (২) শ্রেঢীর গুণফল অবশ্যই - $(১+স)^{ন+ম}$,

অর্থাৎ $\left(১+নস+\frac{ন(ন-১)}{১\,২}স^{২}+\frac{ন(ন-১)(ন-২)}{১\,২\,৩}স^{৩}+\quad\right)$

$\times\quad\left(১+মস+\frac{ম(ম-১)}{১\,২}স^{২}+\frac{ম(ম-১)(ম-২)}{১\,২\,৩}স^{৩}+\quad\right)$

$$=১+(ন+ম)স+\frac{(ন+ম)(ন+ম-১)}{১\,২}স^{২}$$

$$+\frac{(ন+ম)(ন+ম-১)(ন+ম-২)}{১\,২\,৩}স^{৩}+\qquad(৩)$$

উপরের (৩) সাম্য এই অনুমানে প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, ন ও ম উভয়ই

অখণ্ড ধনরাশি। কিন্তু ন ও ম খণ্ড বা অখণ্ড, ঋণ বা ধন, যে **প্রকারের** রাশিই হউক না কেন, (৩) সাম্যের বামের শ্রেঢীদ্বয়ের গুণফলের **আকারের** কোন পরিবর্ত্তন হইবে না, তাহা (৩) সাম্যের দক্ষিণের শ্রেঢীর আকারেই থাকিবে। এই কথার সত্যতা হৃদ্গত করিবার নিমিত্ত, শিক্ষার্থী (৩) সাম্যের বামের শ্রেঢাদ্বয়ের দুইচারিটি পদের গুণফল গুণন দ্বারা নিরূপণ করিয়া দেখিতে পারেন, এবং তাহাতে তিনি দেখিবেন, সেই গুণফলের—

প্রথম পদ $= 1$ $=$ (৩) সাম্যের দক্ষিণের শ্রেঢীর ১ম পদ,

দ্বিতীয় পদ $= (ন+ম)স =$ ২য় পদ,

তৃতীয় পদ $= \left(\frac{ন(ন-1)}{2} + \frac{ম(ম-1)}{1\cdot 2} + নম\right)স^2$

$= \frac{ন^2 - ন + ম^2 - ম + 2নম}{1\cdot 2}স^2$

$= \frac{(ন+ম)(ন+ম-1)}{1\cdot 2}স^2 =$ ৩য় পদ,

ইত্যাদি ইত্যাদি ইত্যাদি।

অর্থাৎ ঐ গুণফলের পদগুলি (৩) সাম্যের দক্ষিনের শ্রেঢীর পদগুলির সহিত তুল্য।

উপরের ঐ কথাটির প্রতি বিশেষ মনোনিবেশ আবশ্যক।

অতএব ন ও ম যে প্রকারের রাশিই হউক, (৩) সাম্য ঠিক থাকিবে।

এখন মনে কর (৩) সাম্যের বামের প্রথম শ্রেঢী,

যাহা ন'র কতকগুলি প্রয়োগ ক্রিয়ার ফল,

ফ (ন) এই চিহ্নদ্বারা প্রকাশ করা যাইবে।

এস্থলে ইহা মনে রাখিতে হইবে যে **ফ** (ন) এর **ফ** কোন রাশি নহে, এবং ফ (ন)=(ফ × ন) নহে। **ফ** কেবল একটি সাঙ্কেতিক চিহ্ন, এবং **ফ** (ন)'র অর্থ ন রাশির প্রয়োগ বিশেষের ফল।

এই অর্থে লইলে, যেমন

$$ফ (ন) \quad = ১ + ন স + \frac{ন(ন-১)}{১\,২} স^২ + \frac{ন(ন-১)(ন-২)}{১\,২\,৩} স^৩ + \cdots$$

তেমনই

$$ফ (ম) \quad = ১ + ম স + \frac{ম(ম+১)}{১\,২} স^২ + \frac{ম(ম-১)(ম-২)}{১\,২\cdot৩} স^৩ + \cdots$$

$$ফ (ন+ম) = ১ + (ন+ম)স + \frac{(ন+ম)(ন+ম-১)}{১\cdot২} স^২ +$$

ইত্যাদি ইত্যাদি।

$$এবং\ ফ(ন+ম) = ফ(ন) \times ফ(ম), \qquad (৪)$$

$$ফ (ন+ম+য) = ফ(ন) \times ফ(ম) \times ফ(য),$$

ইত্যাদি ইত্যাদি।

এখানে ন, ম, য প্রভৃতি যে কোন প্রকারের রাশি হইতে পারে।

এখন মনে কর $ন = ম = য = \frac{র}{ল}$, যথায় র ও ল অখণ্ড ধনরাশি। এবং মনে কর ন, ম, য প্রভৃতির সংখ্যা ল। তাহা হইলে

$$ফ \left(\frac{ব}{ল} + \frac{র}{ল} + \frac{র}{ল} + \quad ল\ সংখ্যক\ পদ\ পর্য্যন্ত\right)$$

$$= ফ\left(\frac{ব}{ল}\right) \times ফ\left(\frac{ব}{ল}\right) \times ফ\left(\frac{ব}{ল}\right) \times \quad ল\ সংখ্যক\ উৎপাদক\ পর্য্যন্ত,$$

অর্থাৎ

$$ফ\ (র) = \left\{ফ\left(\frac{র}{ল}\right)\right\}^{ল}।$$

∴ উভয় দিকের ল তম মূল লইলে,

$$\{ফ (ব)\}^{\frac{১}{ল}} = ফ\left(\frac{ব}{ল}\right)। \qquad (৫)$$

পূর্ব্বে বলা হইয়াছে ফ (ন) যে শ্রেণীর সাঙ্কেতিক চিহ্ন তাহাতে ন যে কোন প্রকারের রাশি হইতে পারে।

যদি $ন = \frac{ব}{ল}$ হয়, তাহা হইলে

$$ফ\left(\frac{র}{ল}\right) = ১ + \frac{ব}{ল} স + \frac{\frac{র}{ল}\left(\frac{র}{ল} - ১\right)}{১ ২} স^২ + \frac{\frac{র}{ল}\left(\frac{র}{ল} - ১\right)\left(\frac{র}{ল} - ২\right)}{১.২.৩} স^৩ + \ldots$$

এবং ফ (ব) এই সাঙ্কেতিক চিহ্নে ব অখণ্ড ধনরাশি হইলে

$$ফ(ব) = (১ + স)^{ব},$$

$$\therefore \{ফ(ব)\}^{\frac{১}{ল}} = (১ + স)^{\frac{ব}{ল}}।$$

অতএব (৫) সাম্য এই আকার ধারণ করিবে, যথা—

$$(১ + স)^{\frac{র}{ল}} = ১ + \frac{ব}{ল} স + \frac{\frac{ব}{ল}\left(\frac{ব}{ল} - ১\right)}{১ ২} স^২ + \frac{\frac{ব}{ল}\left(\frac{ব}{ল} - ১\right)\left(\frac{ব}{ল} - ১\right)}{১ ২ ৩} স^৩ + \ldots \quad (৬)$$

সুতরাং $(১ + ১)^{ন}$ এই দ্বিপদের শক্তিচিহ্ন ন যদি খণ্ড ধনরাশি হয়, অর্থাৎ যদি $ন = \frac{ব}{ল}$ হয়, তাহা হইলেও শক্তিপ্রসারণে যে রাশিমালা বা শ্রেণী পাওয়া যায়, তাহাও $(১ + স)^{ন}$ দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণে লব্ধ ১৭৯ ধারার (৫) সাম্যের শ্রেণীর ন্যায়, কেবল ন'র স্থলে $\frac{ব}{ল}$ থাকিবে।

শক্তিচিহ্ন খণ্ডধনরাশি হইলে দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণ কিরূপ হয় দেখা গেল।

১৮৫। এখন দ্বিতীয়তঃ শক্তিচিহ্ন **অখণ্ড বা খণ্ড ঋণরাশি** হইলে দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণ কিরূপ হইবে দেখা যাউক।

উপরের ১৮৪ ধারার (৪) সাম্যে মনে কর

ম = – ন।

তাহা হইলে $\text{ফ}(\text{ন}) \times \text{ফ}(-\text{ন}) = \text{ফ}(\text{ন}-\text{ন}) = \text{ফ}(০)$

$$= ১,$$

কারণ ন = ০ হইলে, $\text{ফ}(\text{ন}) = ১ + ০ + ০ +$ হইবে।

অতএব $\dfrac{১}{\text{ফ}(\text{ন})} = \text{ফ}(-\text{ন})$।

কিন্তু পূর্ব্বে (১৮৪ ধারায়) সপ্রমাণ করা হইয়াছে, ন অখণ্ড বা খণ্ড যে কোন প্রকারের ধনরাশি হইলে $\text{ফ}(\text{ন}) = (১+\text{স})^{\text{ন}}$।

অতএব $\dfrac{১}{\text{ফ}(\text{ন})} = \dfrac{১}{(১+\text{স})^{\text{ন}}} = (১+\text{স})^{-\text{ন}}$ (৭৯ ধারা দ্রষ্টব্য।

$$\therefore\ (১+\text{স})^{-\text{ন}} = \text{ফ}(-\text{ন})$$

$$= ১ + (-\text{ন})\text{স} + \frac{(-\text{ন})(-\text{ন}-১)}{১\ ২}\text{স}^২$$

$$+ \frac{(-\text{ন})(-\text{ন}-১)(-\text{ন}-২)}{১\ ২\ ৩}\text{স}^৩ + \quad (৭)$$

অতএব দেখা যাইতেছে শক্তিচিহ্ন ন যে কোন ঋণরাশি হইলে, $(১+\text{স})^{\text{ন}}$ এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণে যে শ্রেঢী পাওয়া যায়, তাহা $(১+\text{স})^{\text{ন}}$ দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণে লব্ধ ১৭৯ ধারার (৫) সাধোর শ্রেঢীর ন্যায়, কেবল ন'র স্থানে $(-\text{ন})$ থাকিবে।

১৮৬। শক্তিচিহ্ন ন খণ্ডরাশি বা ঋণরাশি হইলে $(১+\text{স})^{\text{ন}}$ এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণের প্রক্রিয়া যে প্রণালীতে সপ্রমাণ করা হইল, তাহা সম্পূর্ণ সন্তোষজনক বলিয়া মনে না লাগিতে পারে। এবং কোন কোন স্থলে শক্তি প্রসারণ লব্ধ শ্রেঢীর অর্থ বিচিত্র বলিয়া মনে হইবে। যথা,

$$\{১+(-\text{স})\}^{-১} = ১ + (-১)(-\text{স}) + \frac{(-১)(-১-১)}{১\cdot২}(-\text{স})^২$$

$$+ \frac{(-১)(-১-১)(-১-২)}{১\cdot২\cdot৩}(-\text{স})^৩ + \cdots$$

$$= ১ + \text{স} + \text{স}^২ + \text{স}^৩ +$$

এখন মনে কর স = ২, তাহা হইলে

$(-১)^{-১} = ১ + ২ + ২^২ + ২^৩ +$

ইহা অতি বিচিত্র।

তবে ইহার অর্থ এই রূপে করা যাইতে পারে।

$$\{১ + (-স)\}^{-১} = \frac{১}{১ - স} = ১ + স + স^২ + স^৩ + \frac{স^৪}{১ - স},$$

যদি ভাগ করিয়া ভাগফল এবং ভাগশেষ লিখিত হয়।

এবং তাহা হইলে যদি স = ২ হয়,

$$(-১)^{-১} = ১ + ২ + ৪ + ৮ + \frac{১৬}{-১} = ১৫ - ১৬,$$

অর্থাৎ $-১ = -১$।

আর ইহাতে কোন অসঙ্গতি দোষ বা বিচিত্রতা নাই।

অতএব উপরের $(১ + স)^ন$ এই দ্বিপদের শক্তিপ্রসারণলব্ধ শ্রেঢ়ীর সহিত উক্ত দ্বিপদের যে সমতা দেখান হইয়াছে, সেই সমতা, শক্তিচিহ্ন অখণ্ড ধনরাশি হইলেই, প্রকৃত মূল্যের সমতা বলিয়া গৃহীত হইবে। এবং শক্তিচিহ্ন খণ্ডরাশি বা ঋণরাশি হইলে, সে সাম্য **বস্তুতঃ মূল্যের সমতা** সর্ব্বত্র হইবে না, তাহা **দৃশ্যতঃ আকারের সমতা** মাত্র হইবে। তবে অনেকস্থলে (যথা উপরের উদাহরণে ভাগশেষ লইয়া) সেই সাম্যের যাথার্থ্য দেখান যাইতে পারে।

১৮৭। শক্তিচিহ্ন খণ্ড বা ঋণরাশি হইলে, $(১ + স)^ন$ এর শক্তিপ্রসারণে $(র + ১)$তম পদের আকার কোনকোন স্থলে সরল করা যাইতে পারে। যথা,

(১) $(১ + স)^{-ন}$ এর $(র + ১)$ তম পদ

$$= \frac{-ন(-ন-১)(-ন-২)\ \ (-ন-র+১)}{১\cdot২\cdot৩\ \cdot\ র} স^র$$

$$= \frac{ন(ন+১)(ন+২)\ \ (ন+র-১)}{\lfloor র} (-১)^র স^র।$$

(২) $\{১+(-স)\}^{-ন}$এর (র+১) তম পদ

$$=\frac{ন(ন+১)(ন+২)\quad(ন+র-১)}{\underline{\lfloor র}}(-১)^{ব}(-স)^{ব}$$

$$=\frac{ন(ন+১)(ন+২)\quad(ন+র-১)}{\underline{\lfloor র}}\,স^{র}\text{ ।}$$

(৩) $(১+স)^{-২}$ এর (র+১) তম পদ

$$=\frac{২\cdot৩\cdot৪\quad(২+র-১)}{\underline{\lfloor র}}\;(-১)^{র}স^{র}$$

$$=(র+১)(-১)^{র}স^{ব}\text{ ।}$$

(৪) $(১-স)^{-২}$ এর (ব+১) তম পদ

$$=\frac{২\cdot৩\cdot৪\quad(২+ব-১)}{\underline{\lfloor র}}(-১)^{র}\,(-স)^{র}$$

$$=(র+১)\,স^{ব}\text{ ।}$$

(৫) $(১+স)^{\frac{১}{২}}$এব (র+১)তম পদ (র=বা >২)

$$=\frac{\frac{১}{২}(\frac{১}{২}-১)(\frac{১}{২}-২)\quad(\frac{১}{২}-র+১)}{\underline{\lfloor র}}\;স^{র}$$

$$=\frac{১\cdot৩\cdot৫\;\cdot\;(২র-১)}{২^{র}\,\underline{\lfloor র}}(-১)^{র-১}স^{ব}\text{ ।}$$

১১। উদাহরণমালা।

১। (১) $(২স^{\frac{১}{২}}-শ^{\frac{১}{৩}})^{২০}$ ইহার শক্তি প্রসারণে ১৯এর পদ লিখ।

(২) $(অ+স)^{৯}$এর মধ্য পদদ্বয় লিখ।

(৩) $(৪স-৩শ)^{ন}$ ইহার রতম পদ লিখ।

(৪) $\left(স-\frac{১}{স}\right)^{৩ন}$ ইহার প্রথম হইতে (২ন+১) তম পদ লিখ।

(৫) $(১+স)^{২ন}$এর শক্তিপ্রসারণে $স^{ন}$এর প্রকৃতি $(১+স)^{২ন-১}$এব শক্তি প্রসাবণে $স^{ন}$এব প্রকৃতির দ্বিগুণ, ইহা সপ্রমাণ কব।

২। (১) $\frac{১}{(২-৩স^{২})^{\frac{৪}{৫}}}$ ইহাব শক্তি প্রসাবণে প্রথম পদ চতুষ্টয় লিখ।

(২) $(১-স)^{-\frac{প}{ফ}}$ ইহাব শক্তি প্রসারণে সকল পদই ধন বাশি, ইহা সপ্রমাণ কব।

(৩) $(১-স)^{-ন}$ এর শক্তি প্রসাবণে ন তম পদের প্রকৃতি (ন−১) তম পদেব প্রকৃতির দ্বিগুণ, ইহা সপ্রমাণ কর।

(৪) $(১-২স)^{-\frac{১}{২}}$ইহাব শক্তি প্রসাবণের (র+১) তম পদ লিখ।

(৫) যদি প এবং ফ, $(১-স)^{-\frac{১}{২}}$এর এবং $(১-স)^{-\frac{৩}{২}}$এর শক্তি প্রসাবণেব ন তম পদ হয়, তাহা হইলে ফ=(২ন−১) প, ইহা সপ্রমাণ কর।

দ্বাদশ অধ্যায়।

লগ সংখ্যা।

১৮৮। যদি $ন = অ^{স}$ হয়, তাহা হইলে

স'কে ন'র অ **ভিত্তি** মূলক **লগসংখ্যা** বলা যাইবে। এবং ঐ কথাটি এই রূপে লিখিত হইবে,

যথা, $স = লগ_{অ} ন$।

অতএব যদি $ন = অ^{স}$,

তাহা হইলে $স = লগ_{অ} ন$,

এবং $ন = অ^{লগ_{অ} ন}$।

লগ সংখ্যা কল্পনা দ্বারা গণিতের উচ্চতর তত্ত্বের গবেষণায় সহায়তা হইয়াছে, শিক্ষার্থী তাহা উচ্চতর গণিত পাঠে জানিতে পারিবেন।

এবং লগ সংখ্যা প্রয়োগ দ্বারা অনেক স্থলে সামান্য গণনার সুবিধা হইয়াছে, শিক্ষার্থী তাহা এই অধ্যায় পাঠে দেখিতে পাইবেন।

১৮৯। যখন $অ^{০} = ১$,

তখন $লগ_{অ} ১ = ০$। (১)

এবং যখন $অ^{১} = অ$

তখন $লগ_{অ} অ = ১$। (২)

আবার যখন $অ^{-\infty} = \frac{১}{অ^{\infty}} = \frac{১}{\infty} = ০$,

তখন $লগ_{অ} ০ = -\infty$ (৩)

অর্থাৎ ১ এর লগ $= ০$,

ভিত্তির লগ $= ১$,

০ এর লগ $= -\infty$।

১৯০। যদি $ন = অ^{স} = আ^{ষ}$,

তাহা হইলে $অ = আ^{\frac{ষ}{স}}$,

$আ = অ^{\frac{স}{ষ}}$,

$স = লগ_{অ} ন$,

$ষ = গল_{আ} ন$,

$\frac{ষ}{স} = লগ_{আ} অ$,

$\frac{স}{ষ} = লগ_{অ} আ$,

এবং $লগ_{অ} আ \times লগ_{আ} অ = \frac{স}{ষ} \times \frac{ষ}{স} = ১$,

$$\therefore \quad লগ_{আ} অ = \frac{১}{লগ_{অ} আ} \qquad (১)$$

$$লগ_{আ} ন = লগ_{অ} ন \times \frac{১}{লগ_{অ} আ} \qquad (২)$$

১৯১। যদি $ন = অ^{স}, ম = অ^{ষ}$,

তাহা হইলে $নম = অ^{স} \times অ^{ষ}$

$= অ^{স+ষ}$,

এবং $\frac{ন}{ম} = \frac{অ^{স}}{অ^{ষ}}$

$= অ^{স-ষ}$,

$\therefore লগ_{অ}(নম) = স + ষ$

$$= লগ_{অ} ন + লগ_{অ} ম \qquad (১)$$

$$লগ_অ\left(\frac{ন}{ম}\right) = স - য$$
$$= লগ_অ ন - লগ_অ ম \qquad (২)$$

অর্থাৎ

গুণফলের লগ = গুণ্যের লগ + গুণকের লগ,
ভাগফলের লগ = ভাজ্যের লগ − ভাজকের লগ।

১৯২। যদি $ন = অ^স$,

তাহা হইলে $ন^ম = \left(অ^স\right)^ম$

$$= অ^{সম}।$$

$$\therefore \quad লগ_অ ন^ম = সম$$
$$= ম \times লগ_অ ন। \qquad (৩)$$

এ স্থলে ম খণ্ড বা অখণ্ড রাশি ঋণ বা ধনরাশি হইতে পারে।

যদি ম = অখণ্ড রাশি য হয়,

$$লগ_অ ন^য = য \times লগ_অ ন \qquad (৪)$$

যদি $ম = \frac{১}{র}$ হয়,

$$লগ_অ ন^{\frac{১}{র}} = \frac{১}{র} \times লগ_অ ন \qquad (৫)$$

অর্থাৎ

কোন সংখ্যার শক্তির লগ = শক্তিচিহ্ন × সংখ্যার লগ,
কোন সংখ্যার মূলের লগ = $\frac{১}{শক্তিচিহ্ন}$ × সংখ্যার লগ,

এবং সামান্যতঃ

কোন সংখ্যার শক্তির লগ = শক্তিচিহ্ন × সংখ্যার লগ।

১৯৩। উপরে ১৯১ ও ১৯২ ধারায় যাহা প্রতিপন্ন হইল, তাহাতে দেখা যাইতেছে, লগ সংখ্যার সাহায্যে, সংখ্যার কষ্টসাধ্য গুণন ও ভাগক্রিয়ার ফল, তাহাদের লগ সংখ্যার অপেক্ষাকৃত সুখসাধ্য যোগ ও বিয়োগ ক্রিয়ার দ্বারা পাওয়া যাইতে পারে, এবং সংখ্যার কষ্টসাধ্য ও অনেক স্থলে অসাধ্য শক্তি-প্রসারণ ও মূলাকর্ষণ ক্রিয়ার ফল, তাহাদের লগ সংখ্যার অপেক্ষাকৃত সুসাধ্য গুণন ও ভাগ ক্রিয়ার দ্বারা পাওয়া যাইতে পারে।

অর্থাৎ, যদি কোন একটি ভিত্তি অবলম্বন করিয়া, ১ হইতে ১০০০০০ পর্য্যন্ত সকল রাশির লগ সংখ্যা গণনা করিয়া (কিরূপে সে গণনা হইবে তাহা পরে দেখান যাইবে) তাহার তালিকা প্রস্তুত করিয়া রাখা যায়, তাহা হইলে ১০০০০০এর ন্যূন যে কোন রাশির লগ সংখ্যা সেই তালিকা হইতে পাওয়া যাইবে, এবং তদ্দ্বারা ১৯১ ও ১৯২ ধারার নিয়মানুসারে ১০০০০০এর ন্যূন কোন দুই রাশির গুণফলের ও ভাগফলের, এবং কোন এক রাশির শক্তির, লগ সংখ্যা জানা যাইবে। আর সেই ভাগফলের, ও সেই গুণফল বা শক্তি যদি ১০০০০০ এর অনধিক হয় তাহা হইলে তাহার, লগ সংখ্যা হইতে উক্ত তালিকার সাহায্যে ইষ্টরাশি জানা যাইবে।

এখন দেখা আবশ্যক কোন্ রাশি লগ সংখ্যার ভিত্তি বলিয়া গৃহীত হইবে, এবং কিরূপে রাশিশ্রেণির লগ সংখ্যা নিরূপিত হইবে।

১৯৪। সচরাচর দুইটি রাশি লগ সংখ্যার ভিত্তি বলিয়া গৃহীত হইয়া থাকে।

একটি রাশি

$$১ + \frac{১}{১} + \frac{১}{\underline{|২}} + \frac{১}{\underline{|৩}} + \frac{১}{\underline{|৪}} + \quad \text{এই অসীম শ্রেঢী,}$$

অপরটি ১০।

প্রথমটি গবেষণা কার্য্যে, এবং দ্বিতীয়টি গণনা কার্য্যে, সুবিধা জনক বলিয়া ব্যবহৃত হইয়া থাকে। কেন তাহারা ঐ ঐ কার্য্যে সুবিধা জনক, তাহা নিম্নে ক্রমশঃ দেখা যাইবে।

১৯৫। উপরের লিখিত অসীম শ্রেঢ়ী, ই, এই অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

অতএব $ই = ১ + \frac{১}{১} + \frac{১}{\underline{|২}} + \frac{১}{\underline{|৩}} + \quad$ । (১)

ই'র মূল্য $>$ ২, স্পষ্টই দেখা যাইতেছে। এবং ই'র মূল্য $<$ ৩,

কারণ, $\frac{১}{\underline{|২}} + \frac{১}{\underline{|৩}} + \frac{১}{\underline{|৪}} + \quad < \frac{১}{২} + \frac{১}{২^২} + \frac{১}{২^৩} + \cdots$

$$< \frac{\frac{১}{২}}{১ - \frac{১}{২}} < ১,$$

কেন না, $\frac{১}{১.২} = \frac{১}{২}$, কিন্তু $\frac{১}{১.২.৩} < \frac{১}{২^২}$, $\frac{১}{১.২.৩.৪} < \frac{১}{২^৩}$, ইত্যাদি।

এবং ই'র মূল্য কোন সসীম রাশি দ্বারা প্রকাশ করা যায় না।

যদি যায়, মনে কর $ই = \frac{ন}{ম}$ । তাহা হইলে

$$\frac{ন}{ম} = ২ + \frac{১}{\underline{|২}} + \frac{১}{\underline{|৩}} + \cdots ।$$

$\therefore$ $\underline{|ম}$ দিয়া গুণ করিলে

$$ন \; \underline{|ম - ১} = ২ + \text{অখণ্ড রাশি} + \frac{১}{ম + ১} + \frac{১}{(ম+১)(ম+২)} +$$

কিন্তু $\frac{১}{ম+১} + \frac{১}{(ম+১)(ম+২)} + \quad < ১$,

কারণ, এই শ্রেঢ়ী $> \frac{১}{ন+১}$,

এবং $\quad < \frac{১}{ম+১} + \frac{১}{(ম+১)^২} + \frac{১}{(ম+১)^৩} + \cdots$

$$< \frac{\frac{১}{ম+১}}{১ - \frac{১}{ম+১}} < \frac{১}{ম} ।$$

অতএব ন ⌊ম − ১, এই অখণ্ড রাশি

= একটি অখণ্ড রাশি + একটি ভগ্নাংশ,

কিন্তু তাহা কখনই হইতে পারে না।

সুতরাং এই অসীম শ্রেঢ়ী অঙ্কদ্বারা অপরিমেয়।

তবে (১) শ্রেঢ়ীর যত অধিক সংখ্যক পদ লওয়া যাইবে, ততই তাহার গৃহীত মূল্য তাহার প্রকৃত মূল্যের সন্নিকটস্থ হইবে। সচরাচর

ই = ২.৭১৮২৮১৮২ ধরা যায়।

১৯৬। এখন লগ সংখ্যার ভিত্তি ১০ লইলে গণনার কিরূপ সুবিধা হয়, তাহা দেখা যাউক।

সর্ব্বাগ্রে এই কথা বলা রহিল যে, ১০ ভিত্তিমূলক লগসংখ্যার যেখানে প্রয়োগ হইবে, সেখানে লগ শব্দের নিম্নে দক্ষিণে ভিত্তির অঙ্ক লিখিত থাকিবে না,

এবং $লগ_{১০} ন = ক$ ইহার পরিবর্ত্তে

লগ ন = ক ইহাই লিখিত হইবে।

দেখা যাইতেছে,

$$১০ = ১০^{১}, \quad \therefore \quad লগ\ ১০ = ১,$$

$$১০০ = ১০^{২}, \quad \therefore \quad লগ\ ১০০ = ২,$$

$$১০০০ = ১০^{৩}, \quad \therefore \quad লগ\ ১০০০ = ৩,$$

এবং সামান্যতঃ $লগ\ ১০^{প} = প$।

এবং ১ হইতে ৯ পর্য্যন্ত রাশির লগ = কোন ভগ্নাংশ,

১০ ৯৯ · = ১ + ভগ্নাংশ,

১০০ ৯৯৯ ·· = ২ + ভগ্নাংশ,

$১০^{প}$ · $(১০^{প+১} - ১)$ = প + ভগ্নাংশ।

অতএব ১, ১০, ১০০, ১০০০ প্রভৃতি ভিন্ন অন্য রাশির লগ সংখ্যার এক ভাগ অখণ্ড সংখ্যা ও আর এক ভাগ ভগ্নাংশ। এবং প্রচলিত দশমিক প্রণালীতে অঙ্কদ্বারা লিখিত যে কোন রাশির **লগ সংখ্যার অখণ্ড ভাগ** সেই রাশি দৃষ্টমাত্র বলা যায়, ও তাহা **সেই রাশির অখণ্ড ভাগের অঙ্ক সংখ্যার এক কম।**

এই কথা মনে রাখিলে, ১০ ভিত্তি মূলক লগ সংখ্যাব তালিকাতে তাহাব অখণ্ড ভাগ লিখিত হইবাব প্রয়োজন হয় না, এবং ঐরূপ তালিকায় প্রত্যেক রাশির লগ সংখ্যার কেবল ভগ্নাংশ ভাগ দশমিক প্রণালীতে লিখিত থাকে।

আবও দেখা যাইতেছে

$$\text{লগ}(\text{ন} \times ১০^{\text{প}}) = \text{লগ ন} + \text{লগ}১০^{\text{প}}$$

$$= \text{লগ ন} + \text{প},$$

$$\text{লগ}(\text{ন} \div ১০^{\text{ফ}}) = \text{লগ ন} - \text{লগ}১০^{\text{ফ}}$$

$$= \text{লগ ন} - \text{ফ}।$$

অতএব যদি কোন রাশি ন কে দশেব কোন শক্তিদ্বাবা গুণিত বা বিভক্ত করা হয়, সেই গুণফলের বা ভাগফলের লগ সংখ্যার খণ্ডভাগ পরিবর্ত্তিত হয় না, পূর্ব্বরাশি ন এব লগ সংখ্যাব খণ্ডভাগের সহিত সমান থাকে, কেবল লগ সংখ্যার অখণ্ডভাগ দশের সেই শক্তিচিহ্ন পরিমাণে বৃদ্ধি বা হ্রাস পায়। এবং সেই হ্রাসেব জন্য সেই অখণ্ডভাগ কখন কখন ঋণবাশি হইতে পাবে। কিন্তু সেরূপ স্থলে মনে রাখিতে হইবে যে, লগ সংখ্যার খণ্ডভাগ ধনরাশিই থাকে, কেবল অখণ্ডভাগ ঋণরাশি হয়, এবং সেরূপ স্থলে ঋণচিহ্ন সমস্ত সংখ্যার বামে না বসিয়া তাহার অখণ্ড ভাগেব উপরে স্থাপিত হয়। যথা,

$$\text{লগ } ২ = ৩০১০৩০,$$

$$\text{লগ } ·২ = \bar{১}·৩০১০৩০,$$

$$\text{লগ } ·০২ = \bar{২}·৩০১০৩০,$$

$$\text{লগ } ·০০২ = \bar{৩}·৩০১০৩০।$$

সামান্যতঃ

$$\frac{১}{১০^{প}} \text{ ও } \frac{১}{১০^{প+১}} \text{ অর্থাৎ } ১০^{-প} \text{ ও } ১০^{-(প+১)}$$

এই রাশিদ্বয়ের মধ্যস্থিত যে কোন রাশির লগ সংখ্যার খণ্ডভাগ ধনরাশি থাকিলে, তাহার অখণ্ড ভাগ $-(প+১)$ হইবে, অর্থাৎ রাশির দশমিক বিন্দুর দক্ষিণের শূন্যর সংখ্যা অপেক্ষা এক অধিক ঋণরাশি হইবে।

১৯৭। এখন লগ সংখ্যার তালিকা কিরূপে প্রস্তুত করা যাইবে, অর্থাৎ কোন রাশির লগ সংখ্যা কিরূপে নির্ণয় করা যাইতে পারে, তাহা দেখা যাউক। তৎসম্বন্ধীয় প্রক্রিয়াগুলি একটু জটিল, অতএব যত্নের সহিত তৎপ্রতি প্রণিধান আবশ্যক।

১৯৮। দ্বিপদ শক্তি প্রসারণের নিয়মানুসারে,

$$\left(১+\frac{১}{ন}\right)^{নস} = ১+নস\frac{১}{ন}+\frac{নস(নস-১)}{\lfloor ২}\cdot\frac{১}{ন^২} + \frac{নস(নস-১)(নস-২)}{\lfloor ৩}\cdot\frac{১}{ন^৩}+$$

$$= ১+স+\frac{স^২}{\lfloor ২}\left(১-\frac{১}{নস}\right)+\frac{স^৩}{\lfloor ৩}\left(১-\frac{১}{নস}\right)\left(১-\frac{২}{নস}\right)+$$

$$+\frac{স^র}{\lfloor র}\left(১-\frac{১}{নস}\right)\left(১-\frac{২}{নস}\right)\cdots\left(১-\frac{র-১}{নস}\right)+ \quad (১)$$

এখন মনে কর $ন=\infty$, তাহা হইলে

$$\frac{১}{নস}=০,\ \frac{২}{নস}=০,\ \frac{৩}{নস}=০,\ \cdots\ \frac{র-১}{নস}=০,\ \ldots$$

এবং ন অসীম বৃহৎ হইলে, (১) শ্রেঢ়ীর আকার এই হইবে,

$$\left(১+\frac{১}{ন}\right)^{নস} = ১+\frac{স}{১}+\frac{স^২}{\lfloor ২}+\frac{স^৩}{\lfloor ৩}+ \quad (২)$$

আর (২) শ্রেঢীতে স=১ হইলে,

$$\left(১+\frac{১}{ন}\right)^{ন}=১+\frac{১}{১}+\frac{১}{\lfloor২}+\frac{১}{\lfloor৩}+$$

$$=ই।$$

কিন্তু $\left\{\left(১+\frac{১}{ন}\right)^{ন}\right\}^{স}=\left(১+\frac{১}{ন}\right)^{নস}$,

$$\therefore \left(১+\frac{১}{১}+\frac{১}{\lfloor২}+\frac{১}{\lfloor৩}+\quad\right)^{স}$$

$$=১+\frac{স}{১}+\frac{স^{২}}{\lfloor২}+\frac{স^{৩}}{\lfloor২}+\quad,$$

অর্থাৎ $ই^{স} \quad =১+\frac{স}{১}+\frac{স^{২}}{\lfloor২}+\frac{স^{৩}}{\lfloor৩}+ \qquad (৩)$

১৯৯। মনে কর $অ^{স}=ই^{য}$, তাহা হইলে

$$স\ লগ_{ই}অ=য।$$

$$\therefore অ^{স}=ই^{য}=১+\frac{য}{১}+\frac{য^{২}}{\lfloor২}+\frac{য^{৩}}{\lfloor৩}+$$

$$=১+\frac{স}{১}.লগ_{ই}অ+\frac{স^{২}}{\lfloor২}\left(লগ_{ই}অ\right)^{২}+\frac{স^{৩}}{\lfloor৩}\left(লগ_{ই}অ\right)^{৩}+ \qquad (৪)$$

এই শ্রেঢীকে **শক্তি সূচক শ্রেঢী** বলা যায়।

২০০। উপরের ১৯৯ ধারা মতে,

$$অ^{য}=১+\frac{য}{১}লগ_{ই}অ+\frac{য^{২}}{\lfloor২}\left(লগ_{ই}অ\right)^{২}+$$

মনে কর অ=১+স, তাহা হইলে

$$(১+স)^য = ১+যলগ_ই(১+স)+\frac{য^২}{\lfloor ২}\left\{ লগ_ই(১+স) \right\}^২+ \quad (১)$$

এবং দ্বিপদশক্তি প্রসারণের নিয়মে

$$(১+স)^য = ১+য\cdot স+\frac{য(য-১)}{\lfloor ২}স^২+ \quad (২)$$

(১) ও (২) শ্রেণী প্রকৃত পক্ষে একই শ্রেণী, সুতরাং দুই শ্রেণীরই য এর প্রকৃতি সমান।

অতএব

$$লগ_ই(১+স)=স-\frac{স^২}{\lfloor ২}+\frac{১\;২}{\lfloor ৩}স^৩-\frac{১\cdot২\;৩}{\lfloor ৪}স^৪+\cdots$$

$$=স-\frac{স^২}{২}+\frac{স^৩}{৩}-\frac{স^৪}{৪}+ \quad (৩)$$

এবং স'র স্থানে $-স$ লিখিলে

$$লগ_ই(১-স)=-স-\frac{স^২}{২}-\frac{স^৩}{৩}-\frac{স^৪}{৪} \quad (৪)$$

অতএব (৩) শ্রেণী হইতে (৪) শ্রেণী বাদ দিলে

$$লগ_ই(১+স)-লগ_ই(১-স)=২(স+\frac{স^৩}{৩}+\frac{স^৫}{৫}+ \quad)$$

$$\therefore\; লগ_ই\frac{১+স}{১-স}=২\left(স+\frac{স^৩}{৩}+\frac{স^৫}{৫}+ \quad \right) \quad (৫)$$

এখন (৫) শ্রেণীতে স'র স্থানে $\frac{১}{২ন+১}$ লিখ। তাহা হইলে

$$লগ_ই\frac{ন+১}{ন}=২\left\{\frac{১}{২ন+১}+\frac{১}{৩(২ন+১)^৩}+\frac{১}{৫(২ন+১)^৫}+ \quad \right\}।$$

$$\therefore\; লগ_ই(ন+১)-লগ_ইন$$

$$=২\left\{\frac{১}{২ন+১}+\frac{১}{৩(২ন+১)^৩}+\frac{১}{৫(২ন+১)^৫}+ \quad \right\}\ldots(৬)$$

২০১। উপরের ২০০ ধারার (৬) শ্রেণীতে ন=১ লিখিলে

$$\text{লগ}_{\text{ই}}\,২ - \text{লগ}_{\text{ই}}\,১ = \left\{\frac{১}{৩} + \frac{১}{৩.৩^{৩}} + \frac{২}{৫.৩^{৫}} + \quad \right\}।$$

$$\therefore\ \text{লগ}_{\text{ই}}\,২ - ০ \quad = \text{লগ}_{\text{ই}}\,২ = ২\left\{\frac{১}{৩} + \frac{১}{৩.৩^{৩}} + \frac{১}{৫.৩^{৫}} + \quad \right\}$$

$$= {}^{\cdot}৬৯৩১৪৭১ \quad।$$

এখন উপরের (৬) শ্রেণীতে ন=২ লিখিলে

$$\text{লগ}_{\text{ই}}\,৩ - \text{লগ}_{\text{ই}}\,২ = ২\left\{\frac{১}{৫} + \frac{১}{৩.৫^{৩}} + \frac{১}{৫.৫^{৫}} + \quad \right\}$$

$$\therefore\ \text{লগ}_{\text{ই}}\,৩ \quad = \text{লগ}_{\text{ই}}\,২ + ২\left\{\frac{১}{৫} + \frac{১}{৩.৫^{৩}} + \frac{১}{৫.৫^{৫}} + \quad \right\}$$

$$= {}^{\cdot}৬৯৩১৪৭১ + ৪০৫৪৬৫১$$

$$= ১{}^{\cdot}০৯৮৬১২২ \quad।$$

$$\therefore\ \text{লগ}_{\text{ই}}\,৯ \quad = \text{লগ}_{\text{ই}}\,৩^{২} = ২ \times \text{লগ}_{\text{ই}}\,৩$$

$$= ২{}^{\cdot}১৯৭২২৪৪।$$

এখন ২০০ ধারার (৬) শ্রেণীতে ন =৯ লিখিতে

$$\text{লগ}_{\text{ই}}\,১০ - \text{লগ}_{\text{ই}}\,৯ = ২\left\{\frac{১}{১৯} + \frac{১}{৩.১৯^{৩}} + \frac{১}{৫.১৯^{৫}} + \quad \right\}$$

$$\therefore\ \text{লগ}_{\text{ই}}\,১০ = \text{লগ}_{\text{ই}}\,৯ + ২\left\{\frac{১}{১৯} + \frac{১}{৩.১৯^{৩}} + \frac{১}{৫.১৯^{৫}} + \quad \right\}$$

$$= ২{}^{\cdot}১৯৭২২৪৪ + ২\left\{\frac{১}{১৯} + \frac{১}{৩.১৯^{৩}} + \frac{১}{৫.১৯^{৫}} + \quad \right\}$$

$$= ২{}^{\cdot}৩০২৫৮৫০।$$

২০২। উপরের ২০০ ধারার (৬) শ্রেণীতে ন=৩, ন=৪, ন=৫, ইত্যাদি ক্রমশঃ লিখিলে, যেমন $\text{লগ}_{\text{ই}}\,৩$ নির্ণীত হইয়াছে সেইরূপে, $\text{লগ}_{\text{ই}}\,৪$, $\text{লগ}_{\text{ই}}\,৫$, $\text{লগ}_{\text{ই}}\,৬$, প্রভৃতি সকল রাশিরই ই ভিত্তিমূলক লগ সংখ্যা নির্ণীত হইতে পারে। আর $\text{লগ}_{\text{ই}}\,২$ ও $\text{লগ}_{\text{ই}}\,৩$ পূর্ব্বেই নির্ণীত হইয়াছে। এবং

তাহাদের প্রত্যেককে $\frac{১}{\text{লগ}_{ই}১০}$ অর্থাৎ $\frac{১}{২\cdot৩০২৫৮৫০}$ দিয়া গুণ করিলে [১৯০ ধারার (২) সাম্য দ্রষ্টব্য] ২, ৩, ৪, ৫, প্রভৃতি সকল রাশির ১০ ভিত্তিমূলক লগ সংখ্যা নির্ণীত হইতে পারে, এবং তাহাদের তালিকা প্রস্তুত হইতে পারে।

২০৩। লগ সংখ্যার তালিকা প্রস্তুত করণার্থে সকল রাশির নিমিত্তই যে শ্রমসাধ্য গণনা করিতে হয় এমত নহে। কতকগুলি রাশির লগ সংখ্যা নির্ণীত হইলে, কৌশলে অতি সহজে অনেকগুলি অপর রাশির লগ সংখ্যা নিরূপিত হইতে পারে।

যথা, যদি লগ২ = ˙৩০১০৩,

লগ৩ = ˙৪৭৭১২,

লগ৭ = ˙৮৪৫০৯,

জানা থাকে, তাহা হইলে ১ হইতে ১০ পর্যন্ত সকল রাশিরই লগ সংখ্যা জানা যায়।

কারণ, লগ ৪ = লগ $২^{২}$ = ২ লগ ২ = ২ × ৩০১০৩

= ৬০২০৬,

লগ ৫ = লগ $\frac{১০}{২}$ = লগ ১০ − লগ ২ = ১ − ˙৩০১০৩

= ˙৬৯৮৯৭,

লগ ৬ = লগ (২ × ৩) = লগ ২ + লগ ৩ = ˙৩০১০৩ + ˙৪৭৭১২

= ৭৭৮১৫,

লগ ৮ = লগ $২^{৩}$ = ৩ × লগ ২ = ৩ × ˙৩০১০৩

= ˙৯০৩০৯,

লগ ৯ = লগ $৩^{২}$ = ২ × লগ ৩ = ২ × ˙৪৭৭১২

= ˙৯৫৪২৪,

লগ১০ = ১।

অতএব ১ হইতে ১০ পর্য্যন্ত রাশিব লগ সংখ্যার তালিকা এই—

রাশি	লগ
১	০·০০০০০
২	০·৩০১০৩
৩	০·৪৭৭১২
৪	০·৬০২০৬
৫	০·৬৯৮৯৭
৬	০·৭৭৮১৫
৭	০·৮৪৫০৯
৮	০·৯০৩০৯
৯	০·৯৫৪২৪
১০	১·০০০০০

২০৪। লগ সংখ্যার সাহায্যে অনেক প্রকাব প্রশ্ন সমাধান কবা যায়। তাহাব দুইটি উদাহরণ এস্থলে দেওয়া যাইবে।

(১) উদাহরণ। $২^{৬৪}$ এই রাশিতে কতগুলি অঙ্ক আছে?

$$লগ\ ২^{৬৪} = ৬৪ \times লগ\ ২$$
$$= ৬৪ \times ·৩০১০৩$$
$$= ১৯·২৬৫৯২$$

যখন $২^{৬৪}$ ইহাব লগ সংখ্যার অখণ্ড ভাগ ১৯ তখন এই বাশিতে ২০টি অঙ্ক আছে।

(২) উদাহরণ। যদি $২^{স-৩} = ৫$, তবে স কত?

$(স-৩)\ লগ\ ২ = লগ\ ৫ = লগ\ \frac{১০}{২} = ১ - লগ\ ২,$

$$\therefore \quad স-৩ = \frac{১}{লগ\ ২} - ১,$$

$$\therefore \quad স = ২ + \frac{১}{লগ\ ২}।$$

২০৫। উপরের ১৯৮ হইতে ২০২ ধারায় দেখা গেল, ই ভিত্তি মূলক লগ সংখ্যার সাহায্যেই ১০ ভিত্তি মূলক লগ সংখ্যার তালিকা প্রস্তুত করিতে পারা যায়। অতএব ই ভিত্তিমূলক লগ সংখ্যা গবেষণা কার্য্যে যে সুবিধাজনক তাহার একটি দৃষ্টান্ত এইখানে পাওয়া গেল।

১২। উদাহরণমালা।

১। (১) লগ ৬২৫, লগ ·০০০৬২৫, লগ $\frac{১}{১৬}$ নির্ণয় কর। (লগ ২ $=$ ·৩০১০৩)।

(২) $\text{লগ}_{৫}$১৪৪ এর অখণ্ড ভাগ কত ?

(৩) লগ ২১৬ ও লগ ১০৮০ কত কত ?

(লগ ২ $=$ ·৩০১০৩, লগ ৩ $=$ ·৪৭৭১২)।

(৪) $\text{লগ}_{৮}$ ১৬ কত ?

(৫) যদি $অ^{২স} - ২অ^{স} = ৮$, তাহা হইলে স কত ?

২। (১) $\frac{১}{ই} = \frac{২}{\underline{|৩}} + \frac{৪}{\underline{|৫}} + \frac{৬}{\underline{|৭}} +$

ইহা সপ্রমাণ কর।

(২) $\sqrt{ই}$ কত ?

(৩) $১ + \frac{১+অ}{\underline{|২}} + \frac{১+অ+অ^{২}}{\underline{|৩}} + \frac{১+অ+অ^{২}+অ^{৩}}{\underline{|৪}} +$

ইহার মূল্য কত ?

(৪) $\text{লগ}_{ই}৩ = ১ + \frac{১}{৩\times২^{২}} + \frac{১}{৫\times২^{৪}} + \frac{১}{৭\times২^{৬}} +$

ইহা সপ্রমাণ কর।

(৫) $\frac{ই-১}{ই+১} = \left\{ \frac{১}{\underline{|২}} + \frac{১}{\underline{|৪}} + \frac{১}{\underline{|৬}} + \quad \right\} \div \left\{ \frac{১}{১} + \frac{১}{\underline{|৩}} + \frac{১}{\underline{|৫}} + \quad \right\}$

ইহা সপ্রমাণ কর।

উত্তরমালা ।

১। (১৭ পৃষ্ঠা)।

১। $৬ক - ৭গ^{২}$ । ২। $ক + খ + গ$ ।

৩। $২ক^{২} + ৬খ^{২} - ৬গ^{২}$ । ৪। $ক - ৪খ + ৪গ$ ।

৫। $ঘ^{২} - ২শ$ ।

২। (৪৭ পৃষ্ঠা)।

১। (১) $ক^{৩} + খ^{৩} - গ^{৩} + ৩কখগ$ ।

(২) $১ + স^{২} - স^{৪} - স^{৬}$ ।

(৩) $ক^{৩} + ৪খ^{৩} - ২৭গ^{৩} - ২৪খ^{২}গ + ৪৫ খগ^{২} - ৯গ^{২}ক$
$+ ৩গক^{২} - ক^{২}খ - ৪কখ^{২} + ১২কখগ$ ।

২। (১) $৩ক^{২} - কখ + খ^{২}$ । (২) $স^{২} - সষ - ষ^{২}$ ।

(৩) $স^{২} - স - ১৯$ ।

৩। (১) $ক + ৩খ + ২ঘ$ ।

(১) $-১২ক - ৪খ + ২০গ$ ।

(৩) $(ক - প + ন)স^{২} + (খ + ফ - ম)স + (গ - র + ন)$ ।

(৪) $(ক - খ)\{(ক + খ)স^{৪} + ২স^{৩} + স^{২}\}$ ।

৪। (১) $ক^{৪} - ক^{২}খ^{২} + খ^{৪}$ ।

(২) $ক^{৪} + ক^{৩}খ + ক^{২}খ^{২} + কখ^{৩} + খ^{৪}$ ।

(৩) $ক^{৩} + ক^{২}খ + কখ^{২} + খ^{৩}$ ।

(৪) $ক^{৩} - ক^{২}খ + কখ^{২} - খ^{৩}$ ।

৬। (১) $(স + ৭)(স + ৭)$ । (২) $(৪স - ৫)(৩স + ৪)$ ।

(৩) $(৪স + ৯)(২স - ৩)$ । (৪) $(স - ৫)(স + ৩)$ ।

(৫) $(৩স + ৪)(স + ৫)$ ।

(৬) $(ক^{২} + ক + ৭)(ক^{২} - ক + ৭)$ ।

(৭) $(ক + ৪)(ক^{২} + ২ক + ৪)$ ।

৩। (৫৯ পৃষ্ঠা)।

১। (১) $স-ষ$। (২) $স+২$। (৩) $স+৩$।
(৪) $স-১$। (৫) $স-২$।

২। (১) $(স+২)(স^{৪}+স^{৩}+২স+৪)$।
(২) $(স^{২}-৪)(স^{২}+স-২)(স^{৩}-স+১)$।
(৩) $(স+২)(২স-১)(৩স-১)(৪স^{২}-৩স+১)$।
(৪) $(স-৮)^{২}(৯স^{২}-১০০)(স+৯)$।
(৫) $(স-১)(স-২)(স+৩)(স-৪)(স-৫)(স+৬)$।

৪। (৬৪ পৃষ্ঠা)।

(১) $\frac{৩স^{২}+স}{৪স^{২}+২স-১}$। (২) $\frac{স-৫}{স+৫}$। (৩) $\frac{২স+৩}{৫স-২}$।

(৪) ১। (৫) ১। (৬) $\frac{ক^{২}+খ^{২}}{২কখ}$।

(৭) $\frac{ক^{২}+খ^{২}}{ক}$। (৮) ১। (৯) $\frac{ক^{২}}{খ^{২}}+\frac{খ^{২}}{ক^{২}}-১$।

(১০) $\frac{কঘচ+কঙ}{খঘচ+খঙ+গচ}$।

৫। (৭৪ পৃষ্ঠা)।

১। (১) $ক^{২}+৪খ^{২}+৯গ^{২}+৪কখ+৬কগ+১২খগ$।
(২) $ক^{২}+৪খ^{৪}+৯গ^{৬}+৪কখ^{২}+৬কগ^{৩}+১২খ^{২}গ^{৩}$।
(৩) $ক^{৩}+৬ক^{২}খ+১২কখ^{২}+৮খ^{৩}$।
(৪) $ক^{৩}+৬ক^{২}খ^{২}+১২কখ^{৪}+৮খ^{৬}$।
(৫) $শ^{৬}+৩শ^{৫}+৩শ^{৪}+৪শ^{৩}+৯শ^{২}+৬শ+১$।

২। (১) $ক+২খ+৩গ$। (৪) ১১১।
(২) $২শ^{২}+৩শ-১$। (৫) ১·৪১৪২ ।
(৩) $ক+খ+১$।

৩। (১) $ক+২খ+৩গ$। (৩) $ক+২খ^{২}$। (৫) ১১·৪।
(২) $শ^{২}+শ+১$। (৪) ১৯।

৬। (৮৬ পৃষ্ঠা)।

১। (১) ৪। (২) $\frac{৩}{২}$। (৩) $\frac{১}{৯}$। (৪) $\sqrt{৫সব}$। (৫) $\frac{খ^২}{ক^৩}$।

২। (১) $স^{\frac{৩}{২}} - ২সব^{\frac{১}{২}} + ২স^{\frac{১}{২}}ব - ব^{\frac{৩}{২}}$। (২) $স^৪ + ১ + স^{-৪}$।

(৩) $স - ক^{\frac{১}{৩}}স^{\frac{২}{৩}} + ক^{\frac{২}{৩}}স^{\frac{১}{৩}} - ক$। (৪) $ক^{\frac{২}{৩}} + ক^{-\frac{২}{৩}}$।

৩। (১) $\frac{২৩\sqrt{২}}{৩}$। (২) $\frac{৩}{২}$। (৩) -১। (৪) $\frac{১-\sqrt{১-স^২}}{স}$।

৪। (১) $\sqrt{২}+১$। (২) $\sqrt{\frac{৩}{২}} - \sqrt{\frac{১}{২}}$। (৩) $\frac{৫}{২} - \sqrt{\frac{২১}{২}}$।

(৪) $\sqrt{৫}-১$।

৫। (১) $\frac{-১-\sqrt{-৩}}{২}$। (২) ১।

৭। (১৩৬ পৃষ্ঠা)।

১। (১) ৫। (২) ৩। (৩) প − ফ।

(৪) ৫। (৫) ১২।

২। (১) $\frac{৪৯}{৬০}$। (২) ৫। (৩) অপরাহ্ণ ৪ টা ১২ মিনিট।

(৪) ১২০। (৫) ৫।

৩। (১) ১৩, ২। (২) ·০২, ২৯। (৩) ৪০, ৬০।

(৪) ১১, ৫। (৫) ১০, ১৫।

৪। (১) $\frac{১}{৪}$। (২) ৮। (৩) ২৫ মাইল, ১০০ মাইল।

(৪) ৩০, ৭½, ৬। (৫) ৬, ৩।

৫। (১) ৩১, ১৭। (২) ৪, −১। (৩) ক, খ।

(৪) $\frac{২২}{৭}, -\frac{৭}{১১}$। (৫) $\frac{৫৮}{১৬}$, ২।

৬। (১) ২, ১, $\frac{৩\pm\sqrt{-১}}{২}$। (২) $\pm\sqrt{ক^২+খ+২গ^২}$।

(৩) $\pm৩, \pm\sqrt{১৪}$। (৪) $\pm\sqrt{\frac{১}{ক}}, \frac{-ক^২\pm\sqrt{ক^৪-ক}}{ক}$।

(৫) $\pm\frac{\sqrt{২৭ক^২-(খ-২ক)^৩}}{২৭}$।

৭। (১) ৭২। (২) ৭।

(৩) $(\sqrt{\text{৫}}-\text{১})\cdot\frac{\text{ক}}{\text{২}}, (\text{৩}-\sqrt{\text{৫}})\frac{\text{ক}}{\text{২}}$। (৪) ৩, –১।

(৫) ৬, ৪।

৮। (১) $\frac{(\text{ক}-\text{খ})^{\text{২}}}{\text{ক}+\text{খ}}, \frac{\text{৪কখ}}{\text{ক}+\text{খ}}$। (২) $\frac{\sqrt{\text{ক}^{\text{২}}+\text{খ}^{\text{২}}}}{\text{২}}, \frac{\text{ক}^{\text{২}}-\text{খ}^{\text{২}}}{\sqrt{\text{২}(\text{ক}^{\text{২}}+\text{খ}^{\text{২}})}}$

(৩) ৩, ১, $\text{২}\sqrt{\text{২}}, \sqrt{\text{২}}$। (৪) $\text{২}\sqrt{\text{২}}, \frac{\text{১}}{\sqrt{\text{২}}}$।

(৫) ±৪, ±২।

৯। (১) ৯, ৭। (২) ৯, ৬। (৩) ২০ হাত, ১০ হাত।

(৪) ৫ ইঞ্চ, ১২ ইঞ্চ, ১৩ ইঞ্চ। (৫) ১৭ হাত, ১৩ হাত।

৮। (১৫১ পৃষ্ঠা)।

১। (১) ৮। (২) ৩ ২ বা ২ ৩।

৩। (৩) ২।

৯। (১৬৭ পৃষ্ঠা)।

১। (২) ৫৫০। (৩) ৮(ক–৩স)।

২। (২) ১০২৩০। (৩) $\text{১}\frac{\text{১}}{\text{৩}}$।

(৫) $\frac{\text{৪}}{\text{৫}}$, ৪, ২০।

৩। (৫) $\frac{\text{কগ}(\text{ন}-\text{১})}{\text{গ}(\text{ন}-\text{ম})+\text{ক}(\text{ম}-\text{১})}$।

১০। (১৮০ পৃষ্ঠা)।

১। (১) ৮৪০। (২) ১২০। (৩) ৮।

(৪) ২৪৩।

২। (১) ১৭, ২। (২) ১০। (৩) ১০৫

(৫) ১৯০, ১৭১।

১১। (১৯৫ পৃষ্ঠা)।

১। (১) ৭৬০ সশ^{৬}। (২) ১২৬অ^{৫} স^{৪}, ১২৬ অ^{৪} স^{৫}।

(৩) $\dfrac{ন(ন-১)(ন-২)\ldots(ন-ব+২)}{\lfloor\underline{র-১}}$

$\times(৪স)^{ন-ব+১}(৩শ)^{র-১}$।

(৪) $\dfrac{\lfloor\underline{৩ন}}{\lfloor\underline{২ন}\,\lfloor\underline{ন}}\,\dfrac{১}{স^{ন}}$।

২। (১) $২^{-\frac{৪}{৫}}\left\{১+\dfrac{৬স^{২}}{৫}+\dfrac{৮১স^{৪}}{৫০}+\dfrac{৫৬৭স^{৬}}{২৫০}+\quad\right\}$।

(৪) $\dfrac{\lfloor\underline{২ব}}{২^{ব-১}(\lfloor\underline{র})^{২}}স^{ব}$।

১২। (২১০ পৃষ্ঠা)।

১। (১) ২·৭৯৫৮৮, ৪·৭৯৫৮৮, $\bar{৫}$·৭৯৫৮৮।

(২) ৩। (৩) ২·৩৩৪৪৫, ৩·০৩৩৪২।

(৪) $\dfrac{৪}{৩}$। (৫) $\dfrac{২লগ২}{লগঅ}$।

২। (২) ১·৬৪৮। (৩) $\dfrac{ই^{অ}-ই}{অ-১}$।